

- El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es:

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2} (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|), \quad (1)$$

donde  $\omega$  es una constante y  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  es una base ortonormal del espacio de Hilbert. Considérese el operador  $a = |1\rangle\langle 2|$ , y su hermítico conjugado  $a^\dagger$ . A partir de ellos se definen los operadores hermíticos  $A$  y  $B$  como:

$$\begin{aligned} A &= a + a^\dagger, \\ B &= -i(a - a^\dagger). \end{aligned}$$

En el instante inicial  $t = 0$ , el sistema se encuentra en el autoestado del operador  $A$  con autovalor 1.

- Calcúlense los valores medios de  $A$ ,  $A^2$  y la dispersión  $\Delta A$  en un instante  $t > 0$ .
- Repítase el cálculo para el operador  $B$  y compruébese la desigualdad de Heisenberg para  $A$  y  $B$ .

### Sección 1

Los postulados fundamentales de la mecánica cuántica establecen que el estado de un sistema se describe mediante un vector  $|\psi(t)\rangle$  en un espacio de Hilbert. La evolución temporal está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

La solución formal para un hamiltoniano independiente del tiempo define el operador de evolución temporal:

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

El valor esperado de un observable  $\hat{O}$  en un instante  $t$  se define mediante el postulado de Born:

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle$$

La dispersión (incertidumbre)  $\Delta O$  del observable se obtiene a partir de su varianza estadística:

$$\Delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$$

El principio de incertidumbre de Heisenberg generalizado para dos operadores hermíticos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  exige:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

El sistema de dos niveles está definido por la base ortonormal  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ . El hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{\hbar\omega}{2}|2\rangle\langle 2|$$

A partir del operador  $\hat{a} = |1\rangle\langle 2|$  y su conjugado hermítico  $\hat{a}^\dagger = |2\rangle\langle 1|$ , se construyen los operadores hermíticos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \\ \hat{B} &= -i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

## Sección 2

En  $t = 0$ , el sistema es autoestado del operador  $\hat{A}$  con autovalor 1.

$$\hat{A}|\psi(0)\rangle = 1|\psi(0)\rangle$$

Expresamos el estado inicial en la base del sistema:

$$|\psi(0)\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$$

Aplicamos el operador  $\hat{A}$ :

$$(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle) = c_2|1\rangle + c_1|2\rangle$$

Igualando componentes con el autovector:

$$c_2|1\rangle + c_1|2\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$$

Se deduce la relación entre coeficientes:

$$c_1 = c_2$$

Imponemos la condición de normalización  $\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$ :

$$|c_1|^2 + |c_1|^2 = 1$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

Calculamos la evolución del estado para  $t > 0$  aplicando el operador de evolución. Dado que  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  son autoestados de  $\hat{H}$  con autovalores  $-\hbar\omega/2$  y  $\hbar\omega/2$ :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \right) \\ |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t/2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t/2}|2\rangle \end{aligned}$$

Procedemos al cálculo de los valores esperados para el operador  $\hat{A}$ .

$$\langle \hat{A} \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} \langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t/2} \langle 2| \right) (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t/2} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} |2\rangle \right)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{2} \left( e^{-i\omega t/2} \langle 1| + e^{i\omega t/2} \langle 2| \right) \left( e^{-i\omega t/2} |1\rangle + e^{i\omega t/2} |2\rangle \right)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{2} \left( e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} \right)$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \cos(\omega t)$$

Calculamos el cuadrado del operador  $\hat{A}$ :

$$\hat{A}^2 = (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

$$\hat{A}^2 = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$$

$$\hat{A}^2 = \hat{I}$$

El valor esperado del cuadrado es:

$$\langle \hat{A}^2 \rangle = \langle \psi(t) | \hat{I} | \psi(t) \rangle$$

$$\langle \hat{A}^2 \rangle = 1$$

Obtenemos la dispersión  $\Delta A$ :

$$\Delta A = \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)}$$

$$\Delta A = |\text{sen}(\omega t)|$$

Replicamos el cálculo analítico para el operador  $\hat{B}$ :

$$\langle \hat{B} \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} \langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t/2} \langle 2| \right) (-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t/2} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} |2\rangle \right)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( e^{-i\omega t/2} \langle 1| + e^{i\omega t/2} \langle 2| \right) \left( -ie^{-i\omega t/2} |1\rangle + ie^{i\omega t/2} |2\rangle \right)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = \frac{1}{2} \left( -ie^{-i\omega t} + ie^{i\omega t} \right)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = -\text{sen}(\omega t)$$

El cuadrado del operador  $\hat{B}$ :

$$\hat{B}^2 = (-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|)(-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|)$$

$$\hat{B}^2 = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$$

$$\hat{B}^2 = \hat{I}$$

El valor esperado y la dispersión:

$$\langle \hat{B}^2 \rangle = 1$$

$$\Delta B = \sqrt{1 - (-\text{sen}(\omega t))^2}$$

$$\Delta B = |\cos(\omega t)|$$

Evaluamos el conmutador  $[\hat{A}, \hat{B}]$  para verificar el principio de Heisenberg:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

$$\hat{A}\hat{B} = (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)(-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|)$$

$$\hat{A}\hat{B} = i|1\rangle\langle 1| - i|2\rangle\langle 2|$$

$$\hat{B}\hat{A} = (-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|)(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

$$\hat{B}\hat{A} = -i|1\rangle\langle 1| + i|2\rangle\langle 2|$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 2i(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$$

Calculamos el valor esperado del conmutador respecto al estado  $|\psi(t)\rangle$ :

$$\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle = 2i \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle = 0$$

Calculamos el producto de incertidumbres:

$$\Delta A \Delta B = |\text{sen}(\omega t)| |\cos(\omega t)|$$

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} |\text{sen}(2\omega t)|$$

Sustituyendo en la desigualdad general de Heisenberg:

$$\frac{1}{2} |\operatorname{sen}(2\omega t)| \geq 0$$

### Sección 3 (Síntesis)

Los valores observables calculados en un instante  $t > 0$  quedan caracterizados por el siguiente conjunto de expresiones matemáticas:

$$\langle \hat{A} \rangle = \cos(\omega t), \quad \Delta A = |\operatorname{sen}(\omega t)|$$

$$\langle \hat{B} \rangle = -\operatorname{sen}(\omega t), \quad \Delta B = |\cos(\omega t)|$$

$$\Delta A \Delta B = \frac{1}{2} |\operatorname{sen}(2\omega t)| \geq 0$$

El producto de las dispersiones satisface rigurosamente el límite inferior exigido por el principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual se vuelve trivialmente no restrictivo (límite cero) en todo momento debido a que el valor esperado del conmutador se anula para el estado particular dictado por el hamiltoniano  $\hat{H}$ . La dinámica oscilatoria entre observables no conmutativos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  refleja la precesión del estado cuántico confinado bajo simetría puramente unitaria entre las bases.

- .....
- Un sistema de dos partículas 1 y 2 de espín 1/2 está en el estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[ (1+i)|+, +\rangle + i|+, -\rangle + |-, +\rangle \right], \quad (2)$$

siendo  $|\sigma, \sigma'\rangle = |\sigma\rangle_1 \otimes |\sigma'\rangle_2$ , para  $\sigma, \sigma' = \pm$ , donde  $\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle$ .

Supóngase que medimos el espín de la partícula 1 en la dirección  $z$  y el espín de la partícula 2 en la dirección del vector unitario

$$\vec{n} = (\operatorname{sen} \theta, 0, \cos \theta). \quad (3)$$

Consideremos los sucesos en los cuales la medida de  $S_z$  para la partícula 1 da como resultado  $+\hbar/2$ .

- ¿Cuáles son las probabilidades de obtener las dos posibles proyecciones del espín de la partícula 2 en la dirección del vector  $\vec{n}$ ? ¿Cuál es el valor medio de estas medidas? Expresar el resultado en función del ángulo  $\theta$ .
- ¿Cuál es el valor de  $\theta$  que hace máximo el valor medio obtenido en el apartado (a)?

### Sección 1

De acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica, el estado de un sistema compuesto por dos partículas de espín 1/2 se describe mediante un vector en el producto tensorial de sus espacios de Hilbert individuales,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

El operador de proyección asociado a la medida del espín de la partícula 1 en la dirección  $z$  con resultado  $+\hbar/2$  se define rigurosamente como:

$$\hat{\Pi}_{1+} = |+\rangle_1 \langle +|_1 \otimes \hat{I}_2$$

La regla de Born establece que la probabilidad de obtener este resultado a partir de un estado normalizado  $|\psi\rangle$  es el valor esperado del proyector:

$$P(1+) = \langle \psi | \hat{\Pi}_{1+} | \psi \rangle$$

Inmediatamente después de la medida, el postulado de colapso dicta que el estado del sistema se proyecta y debe ser renormalizado:

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{\Pi}_{1+} |\psi\rangle}{\sqrt{P(1+)}}$$

Para la partícula 2, el operador de espín en una dirección arbitraria  $\vec{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$  se construye como el producto escalar del vector  $\vec{n}$  con el vector de matrices de Pauli  $\vec{\hat{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ :

$$\hat{S}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{\hat{S}} = n_x \hat{S}_x + n_y \hat{S}_y + n_z \hat{S}_z$$

Sustituyendo los operadores fundamentales de espín en la base de autoestados de  $\hat{S}_z$ :

$$\hat{S}_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2} (\sin \theta \hat{\sigma}_x + \cos \theta \hat{\sigma}_z) = \frac{\hbar}{2} \left[ \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

El operador total sobre el subespacio de la partícula 2 se expresa entonces como la matriz:

$$\hat{S}_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

El valor medio de un observable para un estado dado  $|\varphi\rangle$  se define mediante el producto interno:

$$\langle \hat{S}_{\vec{n}} \rangle = \langle \varphi | \hat{S}_{\vec{n}} | \varphi \rangle$$

—

## Sección 2

El estado inicial del sistema bipartito es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[ (1+i)|+, +\rangle + i|+, -\rangle + |-, +\rangle \right]$$

Aplicamos el operador de proyección  $\hat{\Pi}_{1+}$  sobre el estado inicial:

$$\hat{\Pi}_{1+} |\psi\rangle = \left( |+\rangle_1 \langle +|_1 \otimes \hat{I}_2 \right) \frac{1}{2} \left[ (1+i)|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 + i|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \right]$$

Dada la ortogonalidad  $\langle +|- \rangle = 0$  y  $\langle +|+ \rangle = 1$ , el estado proyectado no normalizado resulta:

$$\hat{\Pi}_{1+}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[(1+i)|+,+\rangle + i|+,-\rangle\right]$$

Factorizamos el estado de la partícula 1 para aislar el estado de la partícula 2:

$$\hat{\Pi}_{1+}|\psi\rangle = |+\rangle_1 \otimes \frac{1}{2}\left[(1+i)|+\rangle_2 + i|-\rangle_2\right]$$

Calculamos la probabilidad de este suceso mediante la norma al cuadrado del vector proyectado:

$$P(1+) = \left|\frac{1+i}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1^2+1^2}{4} + \frac{1^2}{4}$$

$$P(1+) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Obtenemos el estado normalizado de la partícula 2 posterior a la medida, denominado  $|\psi_2\rangle$ :

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3/4}} \frac{1}{2} \left[ (1+i)|+\rangle + i|-\rangle \right]$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{3}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|-\rangle$$

Procedemos a determinar los autoestados del operador  $\hat{S}_{\vec{n}}$  resolviendo la ecuación de autovalores:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Para el autovalor  $+\hbar/2$ , desarrollamos el sistema algebraico:

$$a \cos \theta + b \text{sen } \theta = a$$

$$b \text{sen } \theta = a(1 - \cos \theta)$$

Expresamos las funciones trigonométricas en función del ángulo mitad:

$$b \left( 2 \text{sen } \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) = a \left( 2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$b \cos \frac{\theta}{2} = a \text{sen } \frac{\theta}{2}$$

Escogiendo la normalización  $a^2 + b^2 = 1$ , el autoestado  $|+, \vec{n}\rangle$  es:

$$|+, \vec{n}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \text{sen} \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

Para el autovalor  $-\hbar/2$ , la ecuación matricial proporciona:

$$a \cos \theta + b \text{sen} \theta = -a$$

$$a(1 + \cos \theta) = -b \text{sen} \theta$$

$$a \left( 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) = -b \left( 2 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$a \cos \frac{\theta}{2} = -b \text{sen} \frac{\theta}{2}$$

El autoestado  $|-, \vec{n}\rangle$  correspondiente resulta:

$$|-, \vec{n}\rangle = -\text{sen} \frac{\theta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle$$

Calculamos la amplitud de probabilidad de obtener  $+\hbar/2$  en la dirección  $\vec{n}$ , dada por  $\langle +, \vec{n} | \psi_2 \rangle$ :

$$A_+ = \left( \cos \frac{\theta}{2} \langle + | + \text{sen} \frac{\theta}{2} \langle - | \right) \left( \frac{1+i}{\sqrt{3}} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} |-\rangle \right)$$

$$A_+ = \frac{1+i}{\sqrt{3}} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{i}{\sqrt{3}} \text{sen} \frac{\theta}{2}$$

La probabilidad asociada se calcula mediante el módulo al cuadrado de la amplitud:

$$P(+, \vec{n}) = A_+ A_+^* = \frac{1}{3} \left| (1+i) \cos \frac{\theta}{2} + i \text{sen} \frac{\theta}{2} \right|^2$$

$$P(+, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + \left( \cos \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{\theta}{2} \right)^2 \right]$$

$$P(+, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} + 2 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

$$P(+, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen} \theta \right]$$

Aplicando la identidad  $\cos^2(\theta/2) = (1 + \cos \theta)/2$ , simplificamos la expresión:

$$P(+, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta + \text{sen} \theta \right]$$

$$P(+, \vec{n}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos \theta + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \theta$$

Calculamos de forma análoga la amplitud de probabilidad para el resultado  $-\hbar/2$ :

$$A_- = \langle -, \vec{n} | \psi_2 \rangle = \left( -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \langle + | + \cos \frac{\theta}{2} \langle - | \right) \left( \frac{1+i}{\sqrt{3}} | + \rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} | - \rangle \right)$$

$$A_- = -\frac{1+i}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \frac{i}{\sqrt{3}} \cos \frac{\theta}{2}$$

Determinamos la probabilidad mediante el módulo al cuadrado:

$$P(-, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left| -(1+i) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right|^2$$

$$P(-, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ \left( -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)^2 + \left( -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \right]$$

$$P(-, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

$$P(-, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ 1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \theta \right]$$

Introduciendo la identidad  $\operatorname{sen}^2(\theta/2) = (1 - \cos \theta)/2$ :

$$P(-, \vec{n}) = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \right]$$

$$P(-, \vec{n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos \theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen} \theta$$

El valor medio analítico de la proyección de espín a lo largo de  $\vec{n}$  se calcula combinando estas probabilidades:

$$\langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{2} P(+, \vec{n}) + \left( -\frac{\hbar}{2} \right) P(-, \vec{n})$$

$$\langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos \theta + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \theta \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos \theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen} \theta \right) \right]$$

$$\langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{2}{6} \cos \theta + \frac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right]$$

$$\langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{6} (\cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta)$$

Para encontrar el ángulo  $\theta$  que maximiza este valor medio, derivamos la expresión con respecto a  $\theta$  e igualamos a cero:

$$\frac{d}{d\theta} \langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{6} (-\text{sen } \theta + 2 \cos \theta) = 0$$

Resolviendo algebraicamente la ecuación trascendente:

$$\text{sen } \theta = 2 \cos \theta$$

$$\tan \theta = 2$$

Comprobamos que es un máximo derivando por segunda vez:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{6} (-\cos \theta - 2 \text{sen } \theta)$$

Puesto que para el primer cuadrante  $\tan \theta = 2 \implies \text{sen } \theta > 0, \cos \theta > 0$ , la segunda derivada es estrictamente negativa, confirmando la existencia de un máximo global.

—

### Sección 3 (Síntesis)

$$P(\pm, \vec{n}) = \frac{1}{2} \pm \left( \frac{1}{6} \cos \theta + \frac{1}{3} \text{sen } \theta \right), \quad \langle S_{\vec{n}} \rangle = \frac{\hbar}{6} (\cos \theta + 2 \text{sen } \theta), \quad \theta_{\max} = \arctan(2)$$

El estado de la segunda partícula tras la medida proyectiva de la primera exhibe una polarización parcial en el plano  $x - z$ , cuantificada por el valor esperado dependiente del ángulo de observación. La optimización diferencial revela que el valor medio se maximiza en el ángulo que alinea perfectamente el eje de medida con el vector de polarización efectiva (vector de Bloch) del estado cuántico reducido.

.....

• Una partícula está confinada a moverse en un pozo unidimensional  $0 \leq x \leq a$ , de anchura  $a$ , bajo la acción del potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 2V_0 \frac{x}{a}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ 2V_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right), & \text{si } \frac{a}{2} \leq x \leq a, \\ \infty, & \text{si } x < 0 \text{ o } x > a. \end{cases} \quad (4)$$

Supóngase que  $V_0$  es una constante pequeña. Utilizando teoría de perturbaciones, calcúlese los niveles de energía a primer orden en  $V_0$ .

**Sección 1** La evolución y el estado de un sistema cuántico conservativo se rigen por la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Para un sistema sujeto a un potencial que difiere levemente de un sistema con solución analítica conocida, el hamiltoniano total se expresa mediante la suma del operador no perturbado  $\hat{H}_0$  y una perturbación  $\hat{V}$ :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

El hamiltoniano no perturbado correspondiente a una partícula de masa  $m$  en un pozo de potencial infinito unidimensional de anchura  $a$  se define en la región  $0 \leq x \leq a$  como:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

Las funciones de onda propias no perturbadas satisfacen la ecuación de autovalores  $\hat{H}_0 \psi_n^{(0)}(x) = E_n^{(0)} \psi_n^{(0)}(x)$  y están dadas por:

$$\psi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Los autovalores exactos de energía del sistema no perturbado son:

$$E_n^{(0)} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

El postulado central de la teoría de perturbaciones independiente del tiempo sin degeneración establece que la corrección a la energía a primer orden  $E_n^{(1)}$  es el valor esperado del operador perturbación evaluado en los autoestados no perturbados:

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{V} | \psi_n^{(0)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{(0)*}(x) \hat{V}(x) \psi_n^{(0)}(x) dx$$

La energía total del sistema cuantizado, truncada a primer orden, se define como:

$$E_n \approx E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$$

## Sección 2

Dado que las funciones de onda se anulan fuera de la región  $0 \leq x \leq a$ , expandimos el producto interno dividiendo el dominio de integración en las dos regiones donde la perturbación  $\hat{V}$  tiene formas funcionales distintas:

$$E_n^{(1)} = \int_0^{a/2} \left(2V_0 \frac{x}{a}\right) \frac{2}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx + \int_{a/2}^a 2V_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{2}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Aplicamos un cambio de variable en la segunda integral definido por  $x' = a - x$ , lo cual implica  $dx' = -dx$ . Los límites de integración cambian de  $[a/2, a]$  a  $[a/2, 0]$ . Invertimos los límites absorbiendo el signo negativo del diferencial:

$$\int_{a/2}^a 2V_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{2}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \int_0^{a/2} 2V_0 \left(1 - \frac{a - x'}{a}\right) \frac{2}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(a - x')}{a}\right) dx'$$

Simplificamos el argumento algebraico dentro del potencial en el integrando:

$$1 - \frac{a - x'}{a} = \frac{x'}{a}$$

Desarrollamos el argumento de la función seno cuadrado utilizando propiedades de periodicidad y paridad:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a - n\pi x'}{a}\right) &= \operatorname{sen}\left(n\pi - \frac{n\pi x'}{a}\right) \\ \operatorname{sen}\left(n\pi - \frac{n\pi x'}{a}\right) &= (-1)^{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\end{aligned}$$

Al elevar al cuadrado, el factor de fase dependiente de  $n$  se elimina rigurosamente:

$$\operatorname{sen}^2\left(n\pi - \frac{n\pi x'}{a}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)$$

La equivalencia formal de las dos integrales parciales permite combinar la expresión de la corrección energética en una sola integral:

$$E_n^{(1)} = \frac{8V_0}{a^2} \int_0^{a/2} x \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Aplicamos la identidad trigonométrica de reducción de potencias para el seno cuadrado:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \right]$$

Sustituimos en la integral global y separamos en dos componentes algebraicos:

$$E_n^{(1)} = \frac{4V_0}{a^2} \left[ \int_0^{a/2} x dx - \int_0^{a/2} x \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx \right]$$

Evaluamos la primera integral polinómica de forma directa:

$$\int_0^{a/2} x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{a/2} = \frac{a^2}{8}$$

Evaluamos la segunda integral aplicando el método de integración por partes. Definimos los componentes y sus diferenciales:

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx, \quad v = \frac{a}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)$$

Construimos la ecuación de partes  $\int u dv = uv - \int v du$ :

$$\int_0^{a/2} x \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx = \left[ x \frac{a}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \right]_0^{a/2} - \int_0^{a/2} \frac{a}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx$$

El término evaluado en las fronteras se anula idénticamente ya que  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$  y  $\operatorname{sen}(0) = 0$ :

$$\left[ \frac{a^2}{4n\pi} \operatorname{sen}(n\pi) - 0 \right] = 0$$

Resolvemos la integral trigonométrica residual:

$$- \int_0^{a/2} \frac{a}{2n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx = -\frac{a}{2n\pi} \left[ -\frac{a}{2n\pi} \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \right]_0^{a/2}$$

Evaluando los límites en la función coseno obtenemos la dependencia de paridad del nivel  $n$ :

$$\frac{a^2}{4n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \frac{a^2}{4n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$$

Sustituimos ambas integrales resueltas en la expresión principal de la corrección a la energía:

$$E_n^{(1)} = \frac{4V_0}{a^2} \left[ \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \right]$$

Cancelamos el parámetro de escala espacial  $a^2$  e introducimos el factor frontal multiplicativo:

$$E_n^{(1)} = \frac{V_0}{2} - \frac{V_0}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1)$$

Reorganizamos el signo de la corrección de paridad para la presentación analítica estándar:

$$E_n^{(1)} = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^n)$$

Sumamos la corrección teórica  $E_n^{(1)}$  al autovalor del oscilador libre para conformar la serie perturbativa truncada.

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$E_n \approx \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^n)$$

Justificación Final: El corrimiento energético consta de un término constante uniforme  $V_0/2$  que domina en el límite clásico ( $n \rightarrow \infty$ ), y un término discreto suprimido por  $1/n^2$  que discrimina la simetría de la función de onda: se anula estrictamente para autoestados

de paridad impar respecto al centro (donde  $n$  es par y la distribución de probabilidad esquiva el pico del potencial) y se magnifica para autoestados de paridad par.

.....

• El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es:

$$H = \hbar (|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|), \quad (5)$$

donde  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  es una base ortonormal del espacio de Hilbert bidimensional.

En el instante  $t = 0$  medimos la energía  $E$  y los observables representados por los operadores:

$$O_1 = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|, \quad (6)$$

$$O_2 = i (|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|), \quad (7)$$

y obtenemos los valores medios:

$$\langle E \rangle = \frac{7}{4}, \quad \langle O_1 \rangle = \frac{3}{4}, \quad \langle O_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (8)$$

a) Obténgase el vector de estado en la base  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  y los valores medios de  $O_1$  y  $O_2$  para  $t > 0$ .

b) Compruébese que se verifica el teorema de Ehrenfest para  $O_1$  y  $O_2$ .

### Sección 1

El estado de un sistema cuántico se representa mediante un vector  $|\Psi(t)\rangle$  en un espacio de Hilbert y su evolución temporal está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

La solución formal para un hamiltoniano  $\hat{H}$  independiente del tiempo se obtiene mediante la acción del operador de evolución temporal unitario:

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$$

Dada una base de autoestados de la energía que satisfacen  $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ , la expansión del estado en un instante arbitrario es:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

El postulado de Born define el valor esperado de un observable  $\hat{O}$  hermítico como el producto interno:

$$\langle \hat{O} \rangle(t) = \langle \Psi(t) | \hat{O} | \Psi(t) \rangle$$

La dinámica temporal de este valor esperado obedece rigurosamente el teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{O}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\right\rangle$$

Para operadores independientes del tiempo explícito ( $\partial\hat{O}/\partial t = 0$ ), el sistema se rige enteramente por el conmutador con el hamiltoniano. Los operadores del sistema en la base ortonormal  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  se definen como:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hbar|1\rangle\langle 1| + 2\hbar|2\rangle\langle 2| \\ \hat{O}_1 &= |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \\ \hat{O}_2 &= i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|\end{aligned}$$

## Sección 2

Definimos el vector de estado en el instante inicial  $t = 0$  utilizando coeficientes complejos polares:

$$|\Psi(0)\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle = r_1e^{i\varphi_1}|1\rangle + r_2e^{i\varphi_2}|2\rangle$$

La condición de normalización del espacio de Hilbert impone:

$$r_1^2 + r_2^2 = 1$$

Aplicamos el operador hamiltoniano para calcular la energía media, asumiendo la dimensionalidad estándar  $\langle\hat{H}\rangle = \frac{7}{4}\hbar$ :

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\Psi(0)|(\hbar|1\rangle\langle 1| + 2\hbar|2\rangle\langle 2|)|\Psi(0)\rangle = \hbar(r_1^2 + 2r_2^2) = \frac{7}{4}\hbar$$

Resolvemos el sistema algebraico para las amplitudes de probabilidad:

$$\begin{aligned}r_1^2 + 2r_2^2 &= (r_1^2 + r_2^2) + r_2^2 = 1 + r_2^2 = \frac{7}{4} \\ r_2^2 &= \frac{3}{4} \implies r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ r_1^2 &= \frac{1}{4} \implies r_1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Evaluamos los observables  $\hat{O}_1$  y  $\hat{O}_2$  en  $t = 0$  para determinar la fase relativa  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ :

$$\begin{aligned}\langle\hat{O}_1\rangle &= \langle\Psi(0)|(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)|\Psi(0)\rangle = c_1^*c_2 + c_2^*c_1 \\ &= 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos(\Delta\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\Delta\varphi) = \frac{3}{4} \\ \implies \cos(\Delta\varphi) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O}_2 \rangle &= \langle \Psi(0) | (i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|) | \Psi(0) \rangle = i(c_1^*c_2 - c_2^*c_1) \\
&= -2r_1r_2 \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) = -2 \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{sen}(\Delta\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(\Delta\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\
\Rightarrow \text{sen}(\Delta\varphi) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Las identidades trigonométricas fijan unívocamente la fase relativa:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$$

Fijando la fase global arbitraria como  $\varphi_1 = 0$ , construimos el estado inicial normalizado exacto:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}|2\rangle$$

Aplicamos el operador de evolución temporal  $\hat{U}(t)$  para propagar el estado a  $t > 0$ :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\hbar t/\hbar}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}e^{-2i\hbar t/\hbar}|2\rangle = \frac{1}{2}e^{-it}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i(2t+\pi/6)}|2\rangle$$

Calculamos los valores esperados dependientes del tiempo expandiendo los coeficientes  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$ :

$$\begin{aligned}
c_1^*(t)c_2(t) &= \left( \frac{1}{2}e^{it} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i(2t+\pi/6)} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-i(t+\pi/6)} \\
\langle \hat{O}_1 \rangle(t) &= 2\text{Re}[c_1^*(t)c_2(t)] = 2\text{Re} \left[ \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-i(t+\pi/6)} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( t + \frac{\pi}{6} \right) \\
\langle \hat{O}_2 \rangle(t) &= -2\text{Im}[c_1^*(t)c_2(t)] = -2\text{Im} \left[ \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-i(t+\pi/6)} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} \left( t + \frac{\pi}{6} \right)
\end{aligned}$$

Procedemos a verificar el teorema de Ehrenfest derivando analíticamente los valores esperados:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \hat{O}_1 \rangle(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( t + \frac{\pi}{6} \right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} \left( t + \frac{\pi}{6} \right) = -\langle \hat{O}_2 \rangle(t) \\
\frac{d}{dt}\langle \hat{O}_2 \rangle(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} \left( t + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( t + \frac{\pi}{6} \right) = \langle \hat{O}_1 \rangle(t)
\end{aligned}$$

Evaluamos los conmutadores formales en la representación de Dirac:

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{O}_1] &= \hbar(|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|)(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) - (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)\hbar(|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|) \\
&= \hbar(|1\rangle\langle 2| + 2|2\rangle\langle 1|) - \hbar(2|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \\
&= \hbar(-|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \\
&= i\hbar(i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|) = i\hbar\hat{O}_2
\end{aligned}$$

Desarrollamos la tasa de cambio prescrita por Ehrenfest para  $\hat{O}_1$ :

$$\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}_1] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle i\hbar \hat{O}_2 \rangle = i^2 \langle \hat{O}_2 \rangle = -\langle \hat{O}_2 \rangle$$

Calculamos el segundo conmutador algebraico:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{O}_2] &= \hbar(|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|)(i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|) - (i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|)\hbar(|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|) \\ &= i\hbar(|1\rangle\langle 2| - 2|2\rangle\langle 1|) - i\hbar(2|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|) \\ &= -i\hbar(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) = -i\hbar \hat{O}_1 \end{aligned}$$

Desarrollamos la tasa de cambio prescrita por Ehrenfest para  $\hat{O}_2$ :

$$\frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}_2] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle -i\hbar \hat{O}_1 \rangle = -i^2 \langle \hat{O}_1 \rangle = \langle \hat{O}_1 \rangle$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}e^{-it}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i(2t+\pi/6)}|2\rangle \\ \langle \hat{O}_1 \rangle(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \\ \langle \hat{O}_2 \rangle(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{d}{dt} \langle \hat{O}_1 \rangle &= -\langle \hat{O}_2 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}_1] \rangle \quad \wedge \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{O}_2 \rangle = \langle \hat{O}_1 \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}_2] \rangle \end{aligned}$$

Justificación Final: El vector de estado manifiesta una oscilación de fase relativa impulsada por la brecha energética  $\Delta E = \hbar$  entre los niveles, lo que induce una dinámica armónica acoplada en los valores esperados de  $\hat{O}_1$  y  $\hat{O}_2$ . La correspondencia exacta entre las derivadas explícitas de los observables y sus conmutadores confirma rigurosamente el teorema de Ehrenfest, ilustrando que la evolución unitaria cuántica preserva inalteradas las estructuras de las ecuaciones de movimiento clásico correspondientes.

Un sistema de dos partículas de espín 1/2 interacciona de forma que el hamiltoniano tiene la forma:

$$H = J \sigma_x \otimes \sigma_x, \tag{9}$$

donde  $J$  es una constante.

En el instante  $t = 0$  el vector de estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = |+\mathbf{z}, -\mathbf{z}\rangle, \tag{10}$$

siendo

$$|+\mathbf{z}, -\mathbf{z}\rangle = |+\mathbf{z}\rangle \otimes |-\mathbf{z}\rangle, \tag{11}$$

con

$$\sigma_z |\pm \mathbf{z}\rangle = \pm |\pm \mathbf{z}\rangle. \tag{12}$$

- a) Obténgase el operador de evolución temporal y el vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  para  $t > 0$ . ¿Para qué valores de  $t$  es  $|\psi(t)\rangle$  un estado factorizado?
- b) Calcúlese la matriz densidad reducida para la partícula 1 para  $t > 0$  y el correspondiente vector de Bloch. ¿Para qué valores de  $t$  esta matriz densidad representa un estado puro?

### Sección 1

El espacio de Hilbert total para un sistema bipartito compuesto por dos partículas se construye mediante el producto tensorial de sus espacios individuales:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

La evolución dinámica de un estado cuántico cerrado está dictada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Para un hamiltoniano conservativo  $\hat{H}$ , la solución formal se obtiene mediante el operador de evolución temporal unitario:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right)$$

El estado global puro del sistema se representa mecánicamente estadísticamente mediante el operador matriz densidad total:

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$$

La información observable accesible únicamente mediante mediciones sobre la partícula 1 se encapsula en la matriz densidad reducida, obtenida aplicando la traza parcial sobre el espacio de Hilbert de la partícula 2:

$$\hat{\rho}_1(t) = \text{Tr}_2[\hat{\rho}(t)] = \sum_{k \in \{+z, -z\}} \langle k_2 | \hat{\rho}(t) | k_2 \rangle$$

Para un sistema bidimensional (espín 1/2), cualquier matriz densidad reducida se parametriza unívocamente utilizando el vector de Bloch  $\vec{a}$ :

$$\hat{\rho}_1(t) = \frac{1}{2} \left( \hat{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \right)$$

Donde las componentes del vector de Bloch se extraen mediante el valor esperado de las matrices de Pauli:

$$a_i = \text{Tr}[\hat{\rho}_1(t) \hat{\sigma}_i]$$

La condición fundamental para que un subsistema describa un estado puro (lo que implica que el estado global es factorizable y no entrelazado) exige la idempotencia de la matriz densidad reducida, o equivalentemente, que la norma del vector de Bloch sea la unidad:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1^2) = 1 \iff |\vec{a}| = 1$$

## Sección 2

Sustituyendo el hamiltoniano  $\hat{H} = J\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x$ , expandimos el operador de evolución temporal mediante su serie de Taylor:

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -i \frac{Jt}{\hbar} \right)^n (\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x)^n$$

Sabiendo que el producto tensorial respeta la multiplicación matricial y que el cuadrado de una matriz de Pauli es el operador identidad  $\hat{I}$ :

$$(\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x)^2 = \hat{\sigma}_x^2 \otimes \hat{\sigma}_x^2 = \hat{I} \otimes \hat{I}$$

Separando la serie en potencias pares e impares, colapsamos la sumatoria en funciones trigonométricas (fórmula de Euler para operadores de involución):

$$\hat{U}(t) = \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) (\hat{I} \otimes \hat{I}) - i \text{sen}\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) (\hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x)$$

Definimos la acción del operador de espín transversal  $\hat{\sigma}_x$  sobre la base longitudinal de autoestados de  $\hat{\sigma}_z$ :

$$\hat{\sigma}_x | +z \rangle = | -z \rangle$$

$$\hat{\sigma}_x | -z \rangle = | +z \rangle$$

Propagamos el estado inicial  $|\psi(0)\rangle = | +z \rangle \otimes | -z \rangle \equiv | +z, -z \rangle$  aplicando el operador unitario resuelto:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) (\hat{I} | +z \rangle \otimes \hat{I} | -z \rangle) - i \text{sen}\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) (\hat{\sigma}_x | +z \rangle \otimes \hat{\sigma}_x | -z \rangle)$$

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | +z, -z \rangle - i \text{sen}\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | -z, +z \rangle$$

El estado global es factorizable (producto tensorial estricto) exclusivamente cuando uno de los coeficientes superpuestos se anula, destruyendo la correlación entrelazada:

$$\cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) = 0 \quad \vee \quad \text{sen}\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) = 0$$

La anulación de cualquiera de las funciones trigonométricas ocurre en los múltiplos enteros de cuartos de período de la oscilación:

$$\frac{Jt}{\hbar} = \frac{n\pi}{2} \implies t = \frac{n\pi\hbar}{2J}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para encontrar la matriz densidad reducida, primero formulamos el proyector total  $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ :

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(t) &= \cos^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | +z, -z\rangle\langle +z, -z| + \sin^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | -z, +z\rangle\langle -z, +z| \\ &+ i \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \left( | +z, -z\rangle\langle -z, +z| - | -z, +z\rangle\langle +z, -z| \right)\end{aligned}$$

La traza parcial sobre el espacio de la partícula 2 requiere el cálculo de elementos ortogonales en la base de  $\mathcal{H}_2$ , obedeciendo  $\text{Tr}_2(|a, b\rangle\langle c, d|) = |a\rangle\langle c|\delta_{bd}$ :

$$\hat{\rho}_1(t) = \langle +z|_2\hat{\rho}(t)| +z\rangle_2 + \langle -z|_2\hat{\rho}(t)| -z\rangle_2$$

Dado que  $\langle -z| +z\rangle = 0$ , los términos cruzados (coherencias) se desvanecen exactamente:

$$\hat{\rho}_1(t) = \cos^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | +z\rangle\langle +z|_1 + \sin^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | -z\rangle\langle -z|_1$$

Procedemos a evaluar las componentes del vector de Bloch. Para la componente transversa  $a_x$ , la traza involucra elementos diagonales cruzados de  $\hat{\sigma}_x$ :

$$a_x = \text{Tr} [\hat{\rho}_1(t)\hat{\sigma}_x] = \cos^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \langle +z|\hat{\sigma}_x| +z\rangle + \sin^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \langle -z|\hat{\sigma}_x| -z\rangle = 0$$

Para la componente transversa  $a_y$ , la traza invoca los elementos diagonales de  $\hat{\sigma}_y$ :

$$a_y = \text{Tr} [\hat{\rho}_1(t)\hat{\sigma}_y] = \cos^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \langle +z|\hat{\sigma}_y| +z\rangle + \sin^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \langle -z|\hat{\sigma}_y| -z\rangle = 0$$

Para la polarización longitudinal  $a_z$ , los elementos diagonales coinciden con los autovalores de  $\hat{\sigma}_z$ :

$$a_z = \text{Tr} [\hat{\rho}_1(t)\hat{\sigma}_z] = \cos^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) (1) + \sin^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) (-1)$$

Aplicando la identidad trigonométrica fundamental para el ángulo doble:

$$a_z = \cos\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)$$

El estado local es puro si y solo si la norma del vector de Bloch es idénticamente 1:

$$|\vec{a}(t)|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \cos^2\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right) = 1 \implies \frac{2Jt}{\hbar} = n\pi \implies t = \frac{n\pi\hbar}{2J}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &= \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \hat{I} \otimes \hat{I} - i \operatorname{sen}\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x \\ |\psi(t)\rangle &= \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | +z, -z\rangle - i \operatorname{sen}\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | -z, +z\rangle \\ \hat{\rho}_1(t) &= \cos^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | +z\rangle\langle +z| + \operatorname{sen}^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right) | -z\rangle\langle -z| \\ \vec{a}(t) &= \left(0, 0, \cos\left(\frac{2Jt}{\hbar}\right)\right) \\ t_{\text{factorizado}} = t_{\text{puro}} &= \frac{n\pi\hbar}{2J} \quad (n \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

Justificación Final: El hamiltoniano de acoplamiento transverso de Ising induce oscilaciones de Rabi que entrelazan periódicamente las dos partículas, haciendo que el vector de Bloch del subsistema 1 varíe a lo largo del eje polar. La matriz densidad reducida evidencia una pérdida de coherencia cuántica (estado mixto) para todo instante, excepto en los polos de la esfera de Bloch, los cuales coinciden exactamente con los tiempos de factorizabilidad del sistema completo.

.....

- Una partícula de masa  $m$  está en el estado fundamental de un oscilador armónico unidimensional de frecuencia  $\omega$ . En el instante de tiempo  $t = 0$  se aplica sobre ella una fuerza adicional proporcional a la distancia  $x$  respecto a la posición de equilibrio del oscilador, que actúa hasta el instante  $t = T$ . Dicha fuerza deriva del potencial:

$$V(t) = -\lambda x^2, \quad \text{si } 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

Aplicando teoría de perturbaciones dependientes del tiempo a primer orden en  $\lambda$ , obténganse las probabilidades de transición desde el estado fundamental del oscilador en  $t = 0$  a un estado excitado para  $t > T$ .

¿Para qué valores de  $T$  se maximiza la probabilidad de transición?

#### Sección 1

La evolución temporal del sistema está dictada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = [\hat{H}_0 + \hat{V}(t)] |\Psi(t)\rangle$$

El hamiltoniano no perturbado del oscilador armónico unidimensional y su espectro de energías son:

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \\ \hat{H}_0 |n\rangle &= E_n |n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

El potencial perturbativo introducido explícitamente es:

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} -\lambda \hat{x}^2 & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para evaluar la acción de la perturbación, el operador posición se define en términos de los operadores de creación y aniquilación  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ :

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

La acción fundamental de los operadores de escalera sobre los autoestados de energía obedece a:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

—

## Sección 2

Expandimos el estado del sistema en la base ortonormal de autoestados de  $\hat{H}_0$ :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$$

Sustituyendo esta expansión en la ecuación de Schrödinger y cancelando los términos diagonales de  $\hat{H}_0$ :

$$i\hbar \sum_n \dot{c}_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} \hat{V}(t) |n\rangle$$

Proyectando por la izquierda con el estado  $\langle m|$  y definiendo la frecuencia de transición  $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$ :

$$i\hbar \dot{c}_m(t) = \sum_n \langle m|\hat{V}(t)|n\rangle c_n(t) e^{i\omega_{mn}t}$$

A primer orden en teoría de perturbaciones, fijamos la condición inicial en el estado fundamental  $c_n^{(0)}(t) = \delta_{n0}$ , aislando la tasa de cambio de las amplitudes perturbadas:

$$i\hbar \dot{c}_m^{(1)}(t) = \langle m|\hat{V}(t)|0\rangle e^{i\omega_{m0}t}$$

Integrando respecto al tiempo en el intervalo activo de la perturbación  $t \in [0, T]$ :

$$c_m^{(1)}(T) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^T \langle m|\hat{V}(t)|0\rangle e^{i\omega_{m0}t} dt$$

Expresamos el operador perturbación utilizando los operadores de escalera:

$$\hat{V}(t) = -\lambda \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})$$

Evaluamos la acción del operador cuadrático sobre el estado fundamental  $|0\rangle$ :

$$\hat{a}^2|0\rangle = 0, \quad \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = |0\rangle, \quad \hat{a}^{\dagger 2}|0\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$$

$$\hat{V}(t)|0\rangle = -\lambda\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{2}|2\rangle + |0\rangle\right)$$

Calculamos los elementos de matriz  $\langle m|\hat{V}(t)|0\rangle$  para estados excitados ( $m > 0$ ):

$$\langle m|\hat{V}(t)|0\rangle = -\lambda\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{2}\delta_{m2} + \delta_{m0}\right)$$

El único estado excitado accesible a primer orden es el estado  $m = 2$ . Extraemos su elemento de matriz:

$$\langle 2|\hat{V}(t)|0\rangle = -\lambda\frac{\hbar\sqrt{2}}{2m\omega}$$

Determinamos la frecuencia de transición entre el estado fundamental y el segundo estado excitado:

$$\omega_{20} = \frac{E_2 - E_0}{\hbar} = \frac{\frac{5}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar} = 2\omega$$

Sustituimos el elemento de matriz y la frecuencia en la integral temporal de la amplitud  $c_2^{(1)}(T)$ :

$$c_2^{(1)}(T) = \frac{1}{i\hbar}\left(-\lambda\frac{\hbar\sqrt{2}}{2m\omega}\right)\int_0^T e^{i2\omega t} dt$$

Resolvemos la integral exponencial:

$$\int_0^T e^{i2\omega t} dt = \frac{e^{i2\omega T} - 1}{i2\omega}$$

$$c_2^{(1)}(T) = \frac{-\lambda\sqrt{2}}{2im\omega}\left(\frac{e^{i2\omega T} - 1}{i2\omega}\right) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4m\omega^2}\left(e^{i2\omega T} - 1\right)$$

La probabilidad de transición a un estado excitado recae enteramente sobre  $P_{0\rightarrow 2}(T) = |c_2^{(1)}(T)|^2$ :

$$P_{0\rightarrow 2}(T) = \left(\frac{\lambda\sqrt{2}}{4m\omega^2}\right)^2 |e^{i2\omega T} - 1|^2$$

Expandimos el módulo al cuadrado del término dependiente del tiempo:

$$|e^{i2\omega T} - 1|^2 = (e^{i2\omega T} - 1)(e^{-i2\omega T} - 1) = 2 - 2\cos(2\omega T) = 4\text{sén}^2(\omega T)$$

$$P_{0 \rightarrow 2}(T) = \left( \frac{2\lambda^2}{16m^2\omega^4} \right) 4 \text{sen}^2(\omega T) = \frac{\lambda^2 \text{sen}^2(\omega T)}{2m^2\omega^4}$$

Para maximizar esta probabilidad respecto a la duración  $T$  de la perturbación, imponemos la condición trigonométrica máxima:

$$\text{sen}^2(\omega T) = 1 \implies \omega T = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Despejamos los tiempos que maximizan la excitación del oscilador armónico:

$$T = \frac{(2k+1)\pi}{2\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$P_{0 \rightarrow 2}(T) = \frac{\lambda^2 \text{sen}^2(\omega T)}{2m^2\omega^4}, \quad T_{\max} = \frac{(2k+1)\pi}{2\omega} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

Justificación Final: La probabilidad de transición obedece a una dinámica de oscilación periódica que refleja la resonancia de acoplamiento del operador por  $\hat{x}^2$ , el cual conecta el estado fundamental exclusivamente con el estado excitado  $n = 2$  conforme a las reglas de selección. Los tiempos de maximización  $T_{\max}$  evidencian que el pulso temporal más eficiente para extraer energía del campo debe ser coherente con un múltiplo impar del semiperiodo de la frecuencia de transición  $\omega_{20} = 2\omega$ .

.....

- Un sistema de dos partículas 1 y 2 está en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|v\rangle \otimes |w\rangle + |w\rangle \otimes |v\rangle), \quad (14)$$

siendo  $|v\rangle$  y  $|w\rangle$  los siguientes vectores de un espacio de Hilbert bidimensional:

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Obténgase la matriz densidad reducida de la partícula 1. Calcúlese su vector de Bloch y determínese si el subsistema constituido por la partícula 1 está en un estado puro o en una mezcla.

### Sección 1

El estado global puro de un sistema cuántico compuesto bipartito se representa mecánicamente mediante el operador matriz densidad total en el espacio producto tensorial  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ :

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

La información observable del subsistema local 1 se obtiene trazando de forma parcial los grados de libertad correspondientes al subsistema 2:

$$\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2[\hat{\rho}] = \sum_k \langle k_2 | \hat{\rho} | k_2 \rangle$$

La evaluación de la traza parcial sobre productos tensoriales directos obedece axiomáticamente la regla de linealidad:

$$\text{Tr}_2 (|a\rangle\langle b| \otimes |c\rangle\langle d|) = |a\rangle\langle b| \text{Tr} (|c\rangle\langle d|) = |a\rangle\langle b| \langle d|c\rangle$$

Para un sistema bidimensional general, la matriz densidad reducida resultante se parametriza unívocamente mediante las matrices de Pauli  $\vec{\sigma}$  y el vector de Bloch real  $\vec{a}$ :

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} \left( \hat{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & 1 - a_z \end{pmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que el subsistema se encuentre en un estado puro exige la idempotencia de su operador densidad reducida, evaluada mediante la traza de su cuadrado:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1^2) = 1 \iff |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

## Sección 2

Calculamos los productos internos fundamentales entre los vectores de la base proporcionada para evaluar las proyecciones cruzadas:

$$\langle v|v\rangle = \frac{1}{2}(1, -i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$\langle w|w\rangle = \frac{1}{2}(1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$\langle w|v\rangle = \frac{1}{2}(1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - i)$$

$$\langle v|w\rangle = \frac{1}{2}(1, -i) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + i)$$

Construimos el operador densidad global para el estado superpuesto a partir de su definición:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} (|v\rangle\langle v| \otimes |w\rangle\langle w| + |v\rangle\langle w| \otimes |w\rangle\langle v| + |w\rangle\langle v| \otimes |v\rangle\langle w| + |w\rangle\langle w| \otimes |v\rangle\langle v|)$$

Aplicamos la traza parcial sobre el subsistema 2 contrayendo el espacio de Hilbert iterativamente:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{3} (|v\rangle\langle v| \langle w|w\rangle + |v\rangle\langle w| \langle v|w\rangle + |w\rangle\langle v| \langle w|v\rangle + |w\rangle\langle w| \langle v|v\rangle)$$

Sustituimos los escalares de los productos internos normalizados en la matriz reducida:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{3} \left( |v\rangle\langle v| + \left(\frac{1+i}{2}\right) |v\rangle\langle w| + \left(\frac{1-i}{2}\right) |w\rangle\langle v| + |w\rangle\langle w| \right)$$

Evaluamos las matrices diádicas de autoestados como representaciones bidimensionales explícitas:

$$|v\rangle\langle v| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1, -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$|w\rangle\langle w| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, -1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|v\rangle\langle w| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (1, -1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

$$|w\rangle\langle v| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

Agrupamos los componentes matriciales diagonales de la expansión:

$$|v\rangle\langle v| + |w\rangle\langle w| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ponderamos las matrices de coherencia cruzada con sus respectivas amplitudes complejas:

$$\left(\frac{1+i}{2}\right) |v\rangle\langle w| = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1-i}{2}\right) |w\rangle\langle v| = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}$$

Sumamos los tensores de interferencia no locales para consolidar la matriz final:

$$\left(\frac{1+i}{2}\right) |v\rangle\langle w| + \left(\frac{1-i}{2}\right) |w\rangle\langle v| = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2-2i \\ -2+2i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ensamblamos todos los términos constitutivos para la forma analítica de la matriz densidad reducida:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{3} \left[ \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1-i \\ -1+i & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1-i}{3} \\ \frac{-1+i}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Extraemos los componentes del vector de Bloch igualando término a término con su parametrización universal:

$$\frac{1}{2}(1 + a_z) = \frac{1}{2} \implies a_z = 0$$

$$\frac{1}{2}(a_x - ia_y) = \frac{-1 - i}{3} \implies a_x - ia_y = -\frac{2}{3} - i\frac{2}{3}$$

Aislamos la parte real e imaginaria para fijar las proyecciones transversales de polarización:

$$a_x = -\frac{2}{3}, \quad a_y = \frac{2}{3}$$

Calculamos la norma al cuadrado del vector resultante para someter a prueba la pureza termodinámica:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0^2 = \frac{8}{9}$$

### Sección 3

Resultado Final:

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} - \frac{i}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{i}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad |\vec{a}|^2 = \frac{8}{9} < 1$$

Justificación Final: El subsistema correspondiente a la partícula 1 se encuentra en un estado mixto estadístico debido a que la norma al cuadrado de su vector de Bloch es estrictamente inferior a la unidad ( $8/9 < 1$ ). Esta impureza local emerge fundamentalmente de que el estado global es un estado no factorizable que codifica entrelazamiento cuántico entre ambas partículas.

- Una partícula de espín 1/2 se encuentra en el instante  $t = 0$  en el autoestado de la componente  $x$  del espín con autovalor  $+\hbar/2$ .

A partir de ese momento, interacciona con un campo magnético  $\vec{B}$  a través del hamiltoniano:

$$H = -\mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \tag{16}$$

siendo  $\mu$  una constante y  $\vec{B}$  un campo que vale:

$$\vec{B} = (0, 0, B), \quad \text{si } 0 \leq t \leq T, \tag{17}$$

$$\vec{B} = (0, B, 0), \quad \text{si } T \leq t \leq 2T, \tag{18}$$

donde  $B$  es una constante.

- Obténgase el vector de estado para  $t = 2T$ .
- Determínese la probabilidad de que, al medir la componente  $x$  del espín en el instante  $t = 2T$ , se obtenga de nuevo el valor  $+\hbar/2$ .

## Sección 1

La evolución temporal del estado de un sistema cuántico está determinada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

Para un hamiltoniano constante por tramos, el estado se propaga mediante el operador de evolución temporal unitario:

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0)\right)$$

El hamiltoniano de interacción dipolar magnética se define mediante las matrices de Pauli  $\vec{\hat{\sigma}}$ :

$$\hat{H} = -\mu \vec{B} \cdot \vec{\hat{\sigma}} = -\mu (B_x \hat{\sigma}_x + B_y \hat{\sigma}_y + B_z \hat{\sigma}_z)$$

Las matrices de Pauli en la base estándar de autoestados de espín a lo largo del eje  $z$ ,  $\{|+z\rangle, |-z\rangle\}$ , son:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El operador exponencial para cualquier matriz de Pauli  $\hat{\sigma}_k$  obedece a la identidad de involución ( $\hat{\sigma}_k^2 = \hat{I}$ ):

$$\exp(i\alpha \hat{\sigma}_k) = \hat{I} \cos(\alpha) + i\hat{\sigma}_k \sin(\alpha)$$

Definimos la frecuencia de precesión fundamental para simplificar la notación:

$$\omega = \frac{\mu B}{\hbar}$$

---

## Sección 2

Calculamos el estado inicial imponiendo la ecuación de autovalores para la componente  $x$  del espín con autovalor  $+\hbar/2$ :

$$\hat{\sigma}_x |\Psi(0)\rangle = (+1) |\Psi(0)\rangle \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$a = b \implies |\Psi(0)\rangle = |+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durante el primer intervalo  $0 \leq t \leq T$ , el campo magnético es  $\vec{B} = (0, 0, B)$ , resultando en el hamiltoniano:

$$\hat{H}_1 = -\mu B \hat{\sigma}_z$$

El operador de evolución para este intervalo de duración  $T$  es:

$$\hat{U}_1(T, 0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(-\mu B \hat{\sigma}_z)T\right) = \exp(i\omega T \hat{\sigma}_z)$$

Expandimos el operador utilizando la identidad trigonométrica matricial:

$$\begin{aligned}\hat{U}_1(T, 0) &= \hat{I} \cos(\omega T) + i \hat{\sigma}_z \sin(\omega T) = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) + i \sin(\omega T) & 0 \\ 0 & \cos(\omega T) - i \sin(\omega T) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\omega T} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega T} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Propagamos el estado inicial hasta el instante  $t = T$ :

$$|\Psi(T)\rangle = \hat{U}_1(T, 0)|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\omega T} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega T} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega T} \\ e^{-i\omega T} \end{pmatrix}$$

En el segundo intervalo  $T \leq t \leq 2T$ , el campo cambia a  $\vec{B} = (0, B, 0)$ , estableciendo el hamiltoniano:

$$\hat{H}_2 = -\mu B \hat{\sigma}_y$$

El operador de evolución para este segundo intervalo de duración  $T$  se construye como:

$$\hat{U}_2(2T, T) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(-\mu B \hat{\sigma}_y)T\right) = \exp(i\omega T \hat{\sigma}_y)$$

Desarrollamos el operador en función de la matriz  $\hat{\sigma}_y$ :

$$\hat{U}_2(2T, T) = \hat{I} \cos(\omega T) + i \hat{\sigma}_y \sin(\omega T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\omega T) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin(\omega T)$$

$$\hat{U}_2(2T, T) = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{pmatrix}$$

Obtenemos el estado final en  $t = 2T$  aplicando este operador al estado intermedio:

$$|\Psi(2T)\rangle = \hat{U}_2(2T, T)|\Psi(T)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega T} \\ e^{-i\omega T} \end{pmatrix}$$

$$|\Psi(2T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega T)e^{i\omega T} + \sin(\omega T)e^{-i\omega T} \\ -\sin(\omega T)e^{i\omega T} + \cos(\omega T)e^{-i\omega T} \end{pmatrix}$$

Para encontrar la probabilidad de medir el autovalor  $+\hbar/2$  en la dirección  $x$  en  $t = 2T$ , evaluamos la amplitud de transición hacia el estado  $|+x\rangle$ :

$$\mathcal{A} = \langle +x|\Psi(2T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\omega T)e^{i\omega T} + \sin(\omega T)e^{-i\omega T} \\ -\sin(\omega T)e^{i\omega T} + \cos(\omega T)e^{-i\omega T} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} [\cos(\omega T)e^{i\omega T} + \text{sen}(\omega T)e^{-i\omega T} - \text{sen}(\omega T)e^{i\omega T} + \cos(\omega T)e^{-i\omega T}]$$

Agrupamos los términos con exponenciales comunes:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} [(\cos(\omega T) - \text{sen}(\omega T)) e^{i\omega T} + (\cos(\omega T) + \text{sen}(\omega T)) e^{-i\omega T}]$$

Desarrollamos las exponenciales complejas a través de la identidad de Euler ( $e^{\pm i\omega T} = \cos(\omega T) \pm i \text{sen}(\omega T)$ ):

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} [(\cos \omega T - \text{sen} \omega T)(\cos \omega T + i \text{sen} \omega T) + (\cos \omega T + \text{sen} \omega T)(\cos \omega T - i \text{sen} \omega T)]$$

Expandimos ambos productos algebraicos término a término:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left( \cos^2 \omega T - \text{sen} \omega T \cos \omega T + i \text{sen} \omega T \cos \omega T - i \text{sen}^2 \omega T \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \cos^2 \omega T + \text{sen} \omega T \cos \omega T - i \text{sen} \omega T \cos \omega T - i \text{sen}^2 \omega T \right) \end{aligned}$$

Cancelamos los términos cruzados opuestos y sumamos los restantes:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left[ 2 \cos^2(\omega T) - 2i \text{sen}^2(\omega T) \right] = \cos^2(\omega T) - i \text{sen}^2(\omega T)$$

La probabilidad se obtiene tomando el módulo al cuadrado de la amplitud  $\mathcal{A}$ :

$$P_{+x} = |\mathcal{A}|^2 = (\cos^2(\omega T))^2 + (-\text{sen}^2(\omega T))^2 = \cos^4(\omega T) + \text{sen}^4(\omega T)$$

Aplicamos identidades trigonométricas de ángulo doble para compactar la probabilidad:

$$\begin{aligned} P_{+x} &= \left( \cos^2(\omega T) + \text{sen}^2(\omega T) \right)^2 - 2 \text{sen}^2(\omega T) \cos^2(\omega T) \\ &= 1 - \frac{1}{2} (2 \text{sen}(\omega T) \cos(\omega T))^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2(2\omega T) \end{aligned}$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$|\Psi(2T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right) e^{i\frac{\mu BT}{\hbar}} + \text{sen}\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right) e^{-i\frac{\mu BT}{\hbar}} \\ -\text{sen}\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right) e^{i\frac{\mu BT}{\hbar}} + \cos\left(\frac{\mu BT}{\hbar}\right) e^{-i\frac{\mu BT}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

$$P_{+x} = 1 - \frac{1}{2} \text{sen}^2\left(\frac{2\mu BT}{\hbar}\right)$$

Justificación Final: El estado final se genera a través de dos precesiones de Larmor ortogonales y no conmutativas, proyectando al vector de espín progresivamente sobre la esfera de Bloch. La interferencia resultante condiciona la probabilidad de recuperación del estado inicial a un valor acotado en el intervalo cerrado  $[1/2, 1]$ , reflejando las defasajes asimétricos inducidos por los diferentes ejes de rotación.

.....

- Un oscilador armónico unidimensional perturbado tiene el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \lambda \cosh X, \quad (19)$$

siendo  $\lambda$  una constante pequeña.

Calcúlese, a primer orden en  $\lambda$ , la energía del estado fundamental del oscilador.

### Sección 1

La descripción del sistema obedece a la ecuación de autovalores de Schrödinger independiente del tiempo para el hamiltoniano total:

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

El hamiltoniano se descompone en una parte no perturbada, correspondiente al oscilador armónico cuántico, y una perturbación aditiva:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{X}^2$$

$$\hat{V} = \lambda \cosh \hat{X}$$

Para resolver los elementos de matriz, los operadores hermíticos de posición  $\hat{X}$  y momento  $\hat{P}$  se transforman a la base de los operadores no hermíticos de creación  $\hat{a}^\dagger$  y aniquilación  $\hat{a}$ , que satisfacen la relación de conmutación canónica:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

Debido a que la perturbación contiene funciones exponenciales del operador posición, se requiere la identidad del teorema de Baker-Campbell-Hausdorff para dos operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  que conmutan con su propio conmutador ( $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ ):

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$$

---

### Sección 2

Expandimos la energía y el vector de estado en series de potencias del parámetro de acoplamiento  $\lambda$ :

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$|\psi_n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |n^{(2)}\rangle + \dots$$

Sustituimos estas expansiones en la ecuación de Schrödinger fundamental:

$$\left(\hat{H}_0 + \lambda \hat{V}\right) \left(|n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle\right) = \left(E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)}\right) \left(|n^{(0)}\rangle + \lambda |n^{(1)}\rangle\right)$$

Aislamos estrictamente los términos de primer orden en  $\lambda$ :

$$\hat{H}_0 |n^{(1)}\rangle + \hat{V} |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} |n^{(0)}\rangle$$

Proyectamos por la izquierda con el autoestado no perturbado  $\langle n^{(0)}|$ :

$$\langle n^{(0)} | \hat{H}_0 |n^{(1)}\rangle + \langle n^{(0)} | \hat{V} |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} \langle n^{(0)} |n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)} \langle n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$$

Aprovechamos la hermiticidad de  $\hat{H}_0$  para aplicar su acción hacia la izquierda, sabiendo que  $\langle n^{(0)} | \hat{H}_0 = E_n^{(0)} \langle n^{(0)} |$ :

$$E_n^{(0)} \langle n^{(0)} |n^{(1)}\rangle + \langle n^{(0)} | \hat{V} |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} \langle n^{(0)} |n^{(1)}\rangle + E_n^{(1)}$$

Cancelamos los términos análogos para obtener la expresión exacta de la corrección energética a primer orden para el estado fundamental ( $n = 0$ ):

$$E_0^{(1)} = \langle 0 | \hat{V} |0\rangle = \lambda \langle 0 | \cosh \hat{X} |0\rangle$$

Expresamos la función hiperbólica en términos de operadores exponenciales:

$$\cosh \hat{X} = \frac{1}{2} \left( e^{\hat{X}} + e^{-\hat{X}} \right)$$

Definimos una constante escalar auxiliar  $\gamma$  para agrupar las dimensiones del operador posición:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Sustituimos la definición escalar en los operadores exponenciales:

$$e^{\pm \hat{X}} = \exp \left( \pm \gamma \hat{a}^\dagger \pm \gamma \hat{a} \right)$$

Asignamos las variables de la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff como  $\hat{A} = \pm \gamma \hat{a}^\dagger$  y  $\hat{B} = \pm \gamma \hat{a}$ , y calculamos su conmutador:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\pm \gamma \hat{a}^\dagger, \pm \gamma \hat{a}] = \gamma^2 [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]$$

Aplicamos la relación de conmutación  $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -1$ :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -\gamma^2$$

Evaluamos la forma factorizada de la exponencial del operador:

$$e^{\pm\hat{X}} = e^{\pm\gamma\hat{a}^\dagger} e^{\pm\gamma\hat{a}} e^{-\frac{1}{2}(-\gamma^2)} = e^{\pm\gamma\hat{a}^\dagger} e^{\pm\gamma\hat{a}} e^{\frac{1}{2}\gamma^2}$$

Calculamos el valor esperado del operador factorizado sobre el estado fundamental de Fock  $|0\rangle$ :

$$\langle 0|e^{\pm\hat{X}}|0\rangle = e^{\frac{1}{2}\gamma^2} \langle 0|e^{\pm\gamma\hat{a}^\dagger} e^{\pm\gamma\hat{a}}|0\rangle$$

Expandimos el operador de aniquilación en serie de Taylor actuando sobre el vacío, lo que aniquila todos los términos superiores ( $e^{\pm\gamma\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$ ):

$$\langle 0|e^{\pm\hat{X}}|0\rangle = e^{\frac{1}{2}\gamma^2} \langle 0|0\rangle = e^{\frac{1}{2}\gamma^2}$$

Reincorporamos ambos valores esperados exponenciales en el operador hiperbólico:

$$\langle 0|\cosh \hat{X}|0\rangle = \frac{1}{2} \left( \langle 0|e^{\hat{X}}|0\rangle + \langle 0|e^{-\hat{X}}|0\rangle \right)$$

$$\langle 0|\cosh \hat{X}|0\rangle = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{1}{2}\gamma^2} + e^{\frac{1}{2}\gamma^2} \right) = e^{\frac{1}{2}\gamma^2}$$

Sustituimos el valor original de la constante dimensional  $\gamma^2$ :

$$\gamma^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \implies e^{\frac{1}{2}\gamma^2} = \exp\left(\frac{\hbar}{4m\omega}\right)$$

Insertamos este resultado en la corrección de primer orden:

$$E_0^{(1)} = \lambda \exp\left(\frac{\hbar}{4m\omega}\right)$$

Sumamos la energía no perturbada del estado fundamental,  $E_0^{(0)} = \frac{1}{2}\hbar\omega$ , para consolidar el nivel energético final.

$$E_0 \approx E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \lambda \exp\left(\frac{\hbar}{4m\omega}\right)$$

---

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$E_0 \approx \frac{1}{2}\hbar\omega + \lambda \exp\left(\frac{\hbar}{4m\omega}\right)$$

Justificación Final: La energía del estado fundamental sufre un desplazamiento positivo intrínseco determinado por las fluctuaciones de vacío del campo, dado que el operador  $\cosh \hat{X}$  involucra potencias pares de la posición y favorece transiciones virtuales simétricas. La utilización de la identidad del conmutador de Baker-Campbell-Hausdorff permite desacoplar los operadores de creación y destrucción, revelando un factor exponencial puramente escalar dependiente de la longitud natural del oscilador  $\sqrt{\hbar/m\omega}$ .

.....

• Un sistema de dos partículas de espín 1/2 tiene por hamiltoniano:

$$H = \varepsilon_1 S_{1z} + \varepsilon_2 S_{2z}, \quad (20)$$

donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son dos constantes reales, y  $S_{1z}$  y  $S_{2z}$  son las componentes a lo largo del eje  $z$  de los operadores de espín de las dos partículas.

En el instante inicial el sistema se encuentra en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle), \quad (21)$$

siendo

$$|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle, \quad |-+\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle, \quad (22)$$

donde  $|\pm\rangle$  son los autoestados del operador  $S_z$  con autovalores  $\pm\hbar/2$ .

- a) Obténgase el estado del sistema en un instante de tiempo  $t \geq 0$ .
- b) Supóngase que medimos el espín total  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$  en el instante  $t \geq 0$ . ¿Qué resultados podemos obtener y con qué probabilidades?
- c) Obténganse los valores de  $t$  para los cuales el espín total es nulo.

## Sección 1

La evolución de un estado cuántico está gobernada fundamentalmente por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

Para un hamiltoniano conservativo, la integración directa genera el operador de evolución temporal unitario:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right)$$

El hamiltoniano del sistema y las ecuaciones de autovalores de la base desacoplada para los espines se definen como:

$$\hat{H} = \varepsilon_1 \hat{S}_{1z} + \varepsilon_2 \hat{S}_{2z}$$

$$\hat{S}_{jz} |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

Para determinar el espín total del sistema, se define el operador compuesto y su magnitud:

$$\vec{\hat{S}} = \vec{\hat{S}}_1 + \vec{\hat{S}}_2$$

$$\hat{S}^2|S, M\rangle = S(S + 1)\hbar^2|S, M\rangle$$

La transformación unitaria hacia la base acoplada (coeficientes de Clebsch-Gordan) para dos espines de magnitud 1/2 divide el espacio de Hilbert en un estado singlete ( $S = 0$ ) y estados triplete ( $S = 1$ ):

$$|1, 1\rangle = |+\rangle|+\rangle$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = |-\rangle|-\rangle$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$$

—

## Sección 2

Evaluamos la acción del operador hamiltoniano sobre cada componente de la base desacoplada que conforma el estado inicial:

$$\hat{H}|+\rangle|-\rangle = \left(\varepsilon_1 \frac{\hbar}{2} - \varepsilon_2 \frac{\hbar}{2}\right)|+\rangle|-\rangle = \frac{\hbar}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|+\rangle|-\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle|+\rangle = \left(-\varepsilon_1 \frac{\hbar}{2} + \varepsilon_2 \frac{\hbar}{2}\right)|-\rangle|+\rangle = -\frac{\hbar}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|-\rangle|+\rangle$$

Definimos una frecuencia natural característica para simplificar la notación de las fases relativas:

$$\omega = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Aplicamos el operador de evolución temporal al estado inicial dado  $|\psi(0)\rangle$ :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle) \right]$$

Propagamos las fases explícitas utilizando los autovalores deducidos:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\omega t} |+\rangle|-\rangle + e^{i\omega t} |-\rangle|+\rangle \right)$$

Invertimos el sistema de ecuaciones de la base acoplada para expresar los vectores desacoplados en términos de espín total:

$$|+ - \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle)$$

$$|- + \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle)$$

Sustituimos estas representaciones algebraicamente exactas en el vector de estado temporal:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 0\rangle) + e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle) \right]$$

Reagrupamos iterativamente los términos en función de los estados de espín total:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) |1, 0\rangle + \frac{1}{2} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) |0, 0\rangle$$

Condensamos los coeficientes exponenciales utilizando la identidad trigonométrica de Euler:

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\omega t) |1, 0\rangle - i \operatorname{sen}(\omega t) |0, 0\rangle$$

Extraemos las probabilidades midiendo el observable de momento angular total  $\vec{S}^2$  proyectando sobre los autovectores correspondientes:

$$P(S = 1) = |\langle 1, 0 | \psi(t) \rangle|^2 = \cos^2(\omega t)$$

$$P(S = 0) = |\langle 0, 0 | \psi(t) \rangle|^2 = \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

Imponemos analíticamente la condición de espín total nulo:

$$P(S = 0) = 1 \implies \operatorname{sen}^2(\omega t) = 1$$

Despejamos la fase requerida para la inversión total de probabilidad:

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Sustituimos la frecuencia de oscilación  $\omega$  para aislar los instantes de tiempo  $t$ :

$$t = \frac{(2k + 1)\pi}{2\omega} = \frac{(2k + 1)\pi}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

—

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{2}\right) |1, 0\rangle - i \operatorname{sen}\left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{2}\right) |0, 0\rangle$$

$$P(S = 1) = \cos^2\left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{2}\right), \quad P(S = 0) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)t}{2}\right)$$

$$t_k = \frac{(2k + 1)\pi}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Justificación Final: La diferencia de los acoplamientos energéticos ( $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ) rompe la simetría de intercambio del sistema, generando una evolución de fase relativa que induce transiciones oscilatorias (oscilaciones de Rabi) entre el estado triplete  $S = 1$  y el estado singlete  $S = 0$ . Como resultado, la magnitud del momento angular total  $\vec{S}^2$  no se conserva, provocando que el espín total del ensamble fluctúe periódicamente hasta anularse por completo en instantes discretos.

.....

• En un espacio de Hilbert de dimensión dos, considérense los observables:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

El sistema está caracterizado por una matriz densidad  $\rho$ , tal que en ella los observables  $A$ ,  $B$  y  $C$  tienen los siguientes valores medios:

$$\langle A \rangle = 2, \quad \langle B \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle C \rangle = \Delta, \quad (24)$$

siendo  $\Delta$  una constante real no negativa.

- a) Determínese, en función de la constante  $\Delta$ , la matriz densidad  $\rho$  y el correspondiente vector de Bloch.
- b) ¿Son posibles todos los valores de  $\Delta$ ?

## Sección 1

El formalismo de la mecánica cuántica establece que cualquier estado mixto o puro de un sistema en un espacio de Hilbert bidimensional puede ser representado por una matriz densidad hermítica, semidefinida positiva y de traza unitaria.

$$\operatorname{Tr}(\hat{\rho}) = 1$$

$$\det(\hat{\rho}) \geq 0$$

Para un sistema de dos niveles, la matriz densidad admite una expansión exacta en la base formada por la matriz identidad y el vector de matrices de Pauli.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left( \hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \right)$$

El vector real tridimensional es el vector de Bloch, cuyas componentes parametrizan el estado del sistema.

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$$

$$\vec{\hat{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$$

La restricción física de que las probabilidades no pueden ser negativas requiere que la longitud del vector de Bloch no exceda la unidad.

$$|\vec{r}|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1$$

El valor medio de un observable cuántico arbitrario se define axiomáticamente mediante el funcional traza del producto entre la matriz densidad y el operador asociado.

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O})$$

**Sección 2** Las matrices de Pauli constituyentes son las generadoras fundamentales del álgebra del grupo  $SU(2)$ .

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Descomponemos sistemáticamente cada uno de los observables dados en esta base matricial completa para simplificar el cálculo de las trazas. Para el observable  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \hat{I} + 2\hat{\sigma}_z$$

Para el observable  $\hat{B}$ :

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z$$

Para el observable  $\hat{C}$ :

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C} = 2\hat{\sigma}_y$$

Evaluamos el valor medio de  $\hat{A}$  introduciendo la expansión del vector de Bloch y aplicando linealidad sobre el operador traza.

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \text{Tr} \left( \frac{1}{2} (\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\hat{\sigma}}) (\hat{I} + 2\hat{\sigma}_z) \right) \\ \langle \hat{A} \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \text{Tr}(\hat{I}) + 2 \text{Tr}(\hat{\sigma}_z) + \sum_j r_j \text{Tr}(\hat{\sigma}_j) + 2 \sum_j r_j \text{Tr}(\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_z) \right]\end{aligned}$$

Invocamos las propiedades canónicas de traza nula de las matrices de Pauli y la relación de ortogonalidad matricial.

$$\text{Tr}(\hat{I}) = 2$$

$$\text{Tr}(\hat{\sigma}_j) = 0$$

$$\text{Tr}(\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k) = 2\delta_{jk}$$

Sustituimos estas identidades en la expansión del valor medio de  $\hat{A}$ .

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{2} [2 + 0 + 0 + 2r_z(2)]$$

$$\langle \hat{A} \rangle = 1 + 2r_z$$

Igualamos este resultado al valor medio medido experimentalmente, aislando así la componente polar del vector de Bloch.

$$1 + 2r_z = 2$$

$$r_z = \frac{1}{2}$$

Calculamos de la misma manera el valor esperado para el observable  $\hat{B}$ .

$$\begin{aligned}\langle \hat{B} \rangle &= \text{Tr} \left( \frac{1}{2} (\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\hat{\sigma}}) (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z) \right) \\ \langle \hat{B} \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \text{Tr}(\hat{\sigma}_x) + \text{Tr}(\hat{\sigma}_z) + \sum_j r_j \text{Tr}(\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_x) + \sum_j r_j \text{Tr}(\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_z) \right]\end{aligned}$$

Aplicamos nuevamente las identidades de traza, eliminando los términos no diagonales.

$$\langle \hat{B} \rangle = \frac{1}{2} [0 + 0 + 2r_x + 2r_z]$$

$$\langle \hat{B} \rangle = r_x + r_z$$

Sometemos el resultado a la condición frontera impuesta por el problema.

$$r_x + r_z = \frac{1}{2}$$

Insertamos el valor previamente derivado para la componente  $r_z$ , determinando la coordenada ecuatorial  $x$ .

$$r_x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$r_x = 0$$

Procedemos a evaluar de forma análoga el valor medio para el observable  $\hat{C}$ .

$$\langle \hat{C} \rangle = \text{Tr} \left( \frac{1}{2} (\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) (2\hat{\sigma}_y) \right)$$

$$\langle \hat{C} \rangle = \frac{1}{2} \left[ 2 \text{Tr}(\hat{\sigma}_y) + 2 \sum_j r_j \text{Tr}(\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_y) \right]$$

El álgebra de trazas reduce la expresión exclusivamente a la componente ortogonal en el eje  $y$ .

$$\langle \hat{C} \rangle = \frac{1}{2} [0 + 2r_y(2)]$$

$$\langle \hat{C} \rangle = 2r_y$$

Asociamos esto a la constante paramétrica definida.

$$2r_y = \Delta$$

$$r_y = \frac{\Delta}{2}$$

Agrupamos los escalares calculados para construir el vector de Bloch del sistema.

$$\vec{r} = \left( 0, \frac{\Delta}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Reconstruimos la matriz densidad  $\hat{\rho}$  a partir de su definición y del vector de Bloch obtenido.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\Delta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & 0 - i\frac{\Delta}{4} \\ 0 + i\frac{\Delta}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -i\frac{\Delta}{4} \\ i\frac{\Delta}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Para garantizar que esta matriz represente un estado físico válido, la norma euclidiana del vector de Bloch en la esfera geométrica asociada debe obedecer la cota superior del radio unitario.

$$|\vec{r}|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$$

$$|\vec{r}|^2 = 0^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$|\vec{r}|^2 = \frac{\Delta^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Imponemos la desigualdad estructural sobre el vector de estado.

$$\frac{\Delta^2}{4} + \frac{1}{4} \leq 1$$

$$\Delta^2 + 1 \leq 4$$

$$\Delta^2 \leq 3$$

Extraemos la raíz cuadrada respetando la precondition inicial establecida que declara a  $\Delta$  como una constante real no negativa.

$$-\sqrt{3} \leq \Delta \leq \sqrt{3}$$

$$\Delta \geq 0$$

$$0 \leq \Delta \leq \sqrt{3}$$

---

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -i\frac{\Delta}{4} \\ i\frac{\Delta}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \left(0, \frac{\Delta}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \Delta \in [0, \sqrt{3}]$$

Justificación Final: La matriz densidad obtenida consolida la estructura del estado mixto subyacente donde las amplitudes coherentes son fijadas algebricamente por la base del grupo  $SU(2)$ . La restricción sobre el parámetro geométrico  $\Delta$  se deduce directamente del requisito axiomático de semidefinición positiva para la matriz densidad, confinando las posibles purezas del estado en el interior y la frontera de la esfera de Bloch.

.....

- Un sistema está constituido por dos partículas 1 y 2. La partícula 1 tiene espín  $1/2$ , mientras que la partícula 2 tiene espín 1.

El hamiltoniano del sistema es:

$$H = \alpha \left( S_{1x}^2 + S_{1y}^2 \right) + \beta \left( S_{1z} + S_{2z} \right), \quad (25)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos constantes reales.

Aquí,  $S_{1x}$ ,  $S_{1y}$  y  $S_{1z}$  son los operadores de espín de la partícula 1 a lo largo de las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, y  $S_{2z}$  es la componente  $z$  del operador de espín de la partícula 2.

Determinense los niveles de energía del sistema y su degeneración.

### Sección 1

La estructura de los sistemas cuánticos compuestos se rige por el producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales. Para dos partículas distinguibles, el espacio total es:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

La dimensión del espacio de Hilbert depende de los números cuánticos de espín  $s_1$  y  $s_2$ :

$$\dim(\mathcal{H}) = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$$

El estado del sistema compuesto se expande en la base desacoplada, donde los operadores de momento angular y sus proyecciones en el eje de cuantización  $z$  son diagonales simultáneamente:

$$|m_1, m_2\rangle = |s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$$

Las relaciones de conmutación canónicas garantizan la existencia de esta base común:

$$[\hat{S}_1^2, \hat{S}_{1z}] = 0$$

$$[\hat{S}_2^2, \hat{S}_{2z}] = 0$$

$$[\hat{S}_{1i}, \hat{S}_{2j}] = 0 \quad \forall i, j \in \{x, y, z\}$$

Las ecuaciones de autovalores fundamentales para estos operadores hermíticos son:

$$\hat{S}_j^2 |m_1, m_2\rangle = s_j(s_j + 1)\hbar^2 |m_1, m_2\rangle$$

$$\hat{S}_{jz} |m_1, m_2\rangle = m_j \hbar |m_1, m_2\rangle$$

El operador hamiltoniano que gobierna la dinámica y energía del sistema se define como:

$$\hat{H} = \alpha \left( \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 \right) + \beta \left( \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \right)$$

El espectro de energía se obtiene resolviendo la ecuación de autovalores del hamiltoniano:

$$\hat{H}|m_1, m_2\rangle = E_{m_1, m_2}|m_1, m_2\rangle$$

—

## Sección 2

Descomponemos el operador del momento angular total al cuadrado para la partícula 1 en sus componentes cartesianas:

$$\hat{S}_1^2 = \hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 + \hat{S}_{1z}^2$$

Despejamos la suma de las componentes transversales presentes en el hamiltoniano:

$$\hat{S}_{1x}^2 + \hat{S}_{1y}^2 = \hat{S}_1^2 - \hat{S}_{1z}^2$$

Reescribimos el operador hamiltoniano estrictamente en términos de observables mutuamente conmutables:

$$\hat{H} = \alpha \left( \hat{S}_1^2 - \hat{S}_{1z}^2 \right) + \beta \left( \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \right)$$

Aplicamos el hamiltoniano sobre un estado genérico de la base desacoplada:

$$\hat{H}|m_1, m_2\rangle = \left[ \alpha \left( \hat{S}_1^2 - \hat{S}_{1z}^2 \right) + \beta \left( \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z} \right) \right] |m_1, m_2\rangle$$

Distribuimos la acción de los operadores reemplazándolos por sus respectivos autovalores escalares:

$$\hat{H}|m_1, m_2\rangle = \left[ \alpha \left( s_1(s_1 + 1)\hbar^2 - m_1^2\hbar^2 \right) + \beta \left( m_1\hbar + m_2\hbar \right) \right] |m_1, m_2\rangle$$

Factorizamos las constantes físicas fundamentales:

$$E_{m_1, m_2} = \alpha\hbar^2 \left( s_1(s_1 + 1) - m_1^2 \right) + \beta\hbar(m_1 + m_2)$$

Para la partícula 1, introducimos el valor explícito de su espín  $s_1 = 1/2$ :

$$s_1(s_1 + 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4}$$

Determinamos los valores posibles de la proyección  $m_1$ :

$$m_1 \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Calculamos el cuadrado de la proyección magnética, el cual es degenerado para ambos signos:

$$m_1^2 = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Sustituimos estos escalares en la contribución transversal del hamiltoniano:

$$s_1(s_1 + 1) - m_1^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La expresión de la energía se simplifica introduciendo este término constante:

$$E_{m_1, m_2} = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \beta\hbar(m_1 + m_2)$$

Determinamos la dimensión exacta del espacio de estados utilizando los espines dados  $s_1 = 1/2$  y  $s_2 = 1$ :

$$\dim(\mathcal{H}) = \left(2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right)(2(1) + 1) = (2)(3) = 6$$

Establecemos el conjunto de valores permitidos para la proyección  $m_2$ :

$$m_2 \in \{1, 0, -1\}$$

Calculamos la energía para cada uno de los 6 estados de la base. Para  $|1/2, 1\rangle$ :

$$E_{1/2,1} = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \beta\hbar\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \frac{3}{2}\beta\hbar$$

Para el estado  $|1/2, 0\rangle$ :

$$E_{1/2,0} = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \beta\hbar\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \frac{1}{2}\beta\hbar$$

Para el estado  $|-1/2, 1\rangle$ :

$$E_{-1/2,1} = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \beta\hbar\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \frac{1}{2}\beta\hbar$$

Para el estado  $|1/2, -1\rangle$ :

$$E_{1/2,-1} = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \beta\hbar\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 - \frac{1}{2}\beta\hbar$$

Para el estado  $|-1/2, 0\rangle$ :

$$E_{-1/2,0} = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \beta\hbar\left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 - \frac{1}{2}\beta\hbar$$

Para el estado  $| - 1/2, -1 \rangle$ :

$$E_{-1/2,-1} = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \beta\hbar \left( -\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 - \frac{3}{2}\beta\hbar$$

Agrupamos los niveles de energía resultantes para determinar sus respectivas degeneraciones  $g_i$ :

$$E_1 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \frac{3}{2}\beta\hbar \quad \rightarrow \quad |1/2, 1\rangle$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \frac{1}{2}\beta\hbar \quad \rightarrow \quad |1/2, 0\rangle, | - 1/2, 1\rangle$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 - \frac{1}{2}\beta\hbar \quad \rightarrow \quad |1/2, -1\rangle, | - 1/2, 0\rangle$$

$$E_4 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 - \frac{3}{2}\beta\hbar \quad \rightarrow \quad | - 1/2, -1\rangle$$

---

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$E_1 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \frac{3}{2}\beta\hbar \quad (g = 1)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 + \frac{1}{2}\beta\hbar \quad (g = 2)$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 - \frac{1}{2}\beta\hbar \quad (g = 2)$$

$$E_4 = \frac{1}{2}\alpha\hbar^2 - \frac{3}{2}\beta\hbar \quad (g = 1)$$

Justificación Final: El término transversal del hamiltoniano, que normalmente induce acoplamiento de espines, degenera en una constante escalar puramente aditiva para la partícula de espín 1/2, preservando la simetría rotacional alrededor del eje z. Esto garantiza que los autovectores permanezcan estrictamente en la base desacoplada, donde la degeneración surge exclusivamente de las combinaciones algebraicas idénticas del momento magnético total  $M = m_1 + m_2$ .

.....

• En el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq T$ , una partícula de espín 1/2 se mueve bajo la acción de un campo magnético

$$\vec{B} = (B, 0, B). \tag{26}$$

El hamiltoniano de la partícula es:

$$H = -\hbar\mu \vec{B} \cdot \vec{\sigma}, \tag{27}$$

donde  $\hbar\mu$  es el momento magnético de la partícula.

- a) Obténgase el operador de evolución temporal  $U(t)$ .
- b) En el instante inicial  $t = 0$ , la partícula está en un estado en el que la componente  $z$  del espín vale  $S_z = +\hbar/2$ . Calcúlese la probabilidad de obtener  $S_z = +\hbar/2$  y  $S_z = -\hbar/2$  cuando se efectúa una medida para  $t > T$ .
- c) ¿Cuáles son las probabilidades de medir  $S_x = +\hbar/2$  y  $S_x = -\hbar/2$  después de actuar el campo magnético?

## Sección 1

La evolución temporal de un estado cuántico  $|\Psi(t)\rangle$  en presencia de un hamiltoniano conservativo está dictada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

La solución formal a esta ecuación diferencial define el operador de evolución temporal unitario  $\hat{U}(t, t_0)$ . Para un hamiltoniano independiente del tiempo, tomando  $t_0 = 0$ :

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right)$$

El operador de espín  $\vec{\hat{S}}$  para una partícula de espín 1/2 se expresa en términos del vector de matrices de Pauli  $\vec{\hat{\sigma}}$ :

$$\vec{\hat{S}} = \frac{\hbar}{2} \vec{\hat{\sigma}}$$

Las matrices de Pauli en la base canónica de autoestados de  $\hat{S}_z$  (donde  $|+_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $|-_z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ) son:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices obedecen las relaciones fundamentales de anticonmutación que definen el álgebra tensorial del espín:

$$\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij} \hat{I}$$

El hamiltoniano magnético  $\hat{H}$  correspondiente al momento magnético intrínseco en el campo  $\vec{B} = (B, 0, B)$  es:

$$\hat{H} = -\hbar\mu(B\hat{\sigma}_x + B\hat{\sigma}_z) = -\hbar\mu B(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)$$

Debido a que el campo magnético se apaga estrictamente para  $t > T$ , la evolución del estado por la acción del campo ocurre únicamente en el intervalo  $0 \leq t \leq T$ . Tras este periodo, el estado permanece estacionario. El problema exige determinar el estado final y proyectarlo sobre las bases de autovectores de  $\hat{S}_z$  y  $\hat{S}_x$  para hallar las probabilidades de medición.

## Sección 2

Para calcular el operador de evolución temporal  $\hat{U}(t)$ , procedemos a expandir la exponencial matricial en serie de Taylor:

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^n \hat{H}^n$$

Requerimos evaluar las potencias iterativas del hamiltoniano. Calculamos en primer lugar el cuadrado de  $\hat{H}$ :

$$\hat{H}^2 = \hbar^2\mu^2 B^2 (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)^2$$

Desarrollamos el binomio de operadores aplicando su no conmutatividad explícita:

$$(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)^2 = \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_z^2 + \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x$$

Utilizamos la relación de anticonmutación  $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z\} = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = 0$  y el hecho de que  $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{I}$ :

$$(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)^2 = \hat{I} + \hat{I} + 0 = 2\hat{I}$$

Sustituyendo esto en la expresión de  $\hat{H}^2$ , definimos una frecuencia característica de precesión  $\Omega$ :

$$\hat{H}^2 = 2\hbar^2\mu^2 B^2 \hat{I}$$

$$\Omega = \mu B \sqrt{2}$$

$$\hat{H}^2 = \hbar^2 \Omega^2 \hat{I}$$

Este resultado implica que todas las potencias pares del hamiltoniano son proporcionales a la identidad, y las potencias impares son proporcionales a  $\hat{H}$  mismo. Separamos la serie de Taylor en términos pares ( $n = 2k$ ) e impares ( $n = 2k + 1$ ):

$$\hat{U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^{2k} \hat{H}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^{2k+1} \hat{H}^{2k+1}$$

Introducimos las potencias evaluadas  $\hat{H}^{2k} = (\hbar\Omega)^{2k} \hat{I}$  y  $\hat{H}^{2k+1} = (\hbar\Omega)^{2k} \hat{H}$ :

$$\hat{U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\Omega t)^{2k} \hat{I} - \frac{i}{\hbar\Omega} \hat{H} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\Omega t)^{2k+1}$$

Reconocemos en estas series las expansiones de Taylor clásicas para las funciones trigonométricas  $\cos(\Omega t)$  y  $\text{sen}(\Omega t)$ :

$$\hat{U}(t) = \cos(\Omega t) \hat{I} - i \text{sen}(\Omega t) \frac{\hat{H}}{\hbar\Omega}$$

Inyectamos la definición original de  $\hat{H}$  en la fracción que acompaña al término seno:

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\Omega} = \frac{-\hbar\mu B(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)}{\hbar\mu B\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)$$

Reemplazamos esta fracción en el operador de evolución, obteniendo la forma analítica de  $\hat{U}(t)$ :

$$\hat{U}(t) = \cos(\Omega t) \hat{I} + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)$$

Construimos la representación matricial  $2 \times 2$  de este operador utilizando las matrices de Pauli explícitas:

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) & \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) & \cos(\Omega t) - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) \end{pmatrix}$$

En el instante inicial  $t = 0$ , la partícula se encuentra en el autoestado superior de  $\hat{S}_z$ :

$$|\Psi(0)\rangle = |+_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para un tiempo de medición posterior  $t > T$ , la evolución completa producida por el campo es equivalente al estado en el límite temporal  $T$ , ya que el campo cesa. Aplicamos  $\hat{U}(T)$ :

$$|\Psi(T)\rangle = \hat{U}(T)|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) & \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) & \cos(\Omega T) - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi(T)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \end{pmatrix}$$

Calculamos las amplitudes de probabilidad proyectando el estado sobre los autoestados de  $\hat{S}_z$ :

$$\langle +_z | \Psi(T) \rangle = \cos(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T)$$

$$\langle -_z | \Psi(T) \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T)$$

Determinamos las probabilidades extrayendo el módulo al cuadrado de cada amplitud compleja:

$$P(S_z = +\hbar/2) = |\langle +_z | \Psi(T) \rangle|^2 = \cos^2(\Omega T) + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\Omega T)$$

$$P(S_z = -\hbar/2) = |\langle -_z | \Psi(T) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \text{sen}^2(\Omega T)$$

Para la parte (c), se requieren las proyecciones respecto a  $\hat{S}_x$ . Procedemos definiendo los autoestados del operador  $\hat{S}_x$ , los cuales satisfacen  $\hat{\sigma}_x |\pm_x\rangle = \pm |\pm_x\rangle$ :

$$|+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la amplitud de transición para el autovalor positivo de  $\hat{S}_x$ :

$$\langle +_x | \Psi(T) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \end{pmatrix}$$

$$\langle +_x | \Psi(T) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \right]$$

$$\langle +_x | \Psi(T) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos(\Omega T) + i\sqrt{2} \text{sen}(\Omega T) \right]$$

Extraemos el módulo al cuadrado para obtener su respectiva probabilidad:

$$P(S_x = +\hbar/2) = |\langle +_x | \Psi(T) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left[ \cos^2(\Omega T) + 2 \text{sen}^2(\Omega T) \right]$$

Calculamos la amplitud de transición para el autovalor negativo de  $\hat{S}_x$ :

$$\langle -_x | \Psi(T) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \end{pmatrix}$$

$$\langle -_x | \Psi(T) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos(\Omega T) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega T) \right]$$

$$\langle -_x | \Psi(T) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega T)$$

Su probabilidad correspondiente resulta del módulo al cuadrado:

$$P(S_x = -\hbar/2) = |\langle -x | \Psi(T) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \cos^2(\Omega T)$$

—

### Sección 3

Resultado Final:

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) & \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) & \cos(\Omega t) - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{sen}(\Omega t) \end{pmatrix}$$

$$P(S_z = +\hbar/2) = \cos^2(\Omega T) + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\Omega T)$$

$$P(S_z = -\hbar/2) = \frac{1}{2} \text{sen}^2(\Omega T)$$

$$P(S_x = +\hbar/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\Omega T)$$

$$P(S_x = -\hbar/2) = \frac{1}{2} \cos^2(\Omega T)$$

(donde  $\Omega = \mu B \sqrt{2}$ )

Justificación Final: El operador  $\hat{U}(t)$  describe un giro del vector de estado en el espacio de Hilbert inducido por la precesión del momento magnético en torno a un eje inclinado 45 grados en el plano  $x-z$ . Como el campo permanece inactivo para  $t > T$ , las probabilidades no continúan oscilando, sino que quedan definidas por las proyecciones finales del estado congelado  $|\Psi(T)\rangle$  sobre las bases ortonormales correspondientes.

.....

• Considérese un sistema de dos niveles. Se prepara una mezcla estadística con una probabilidad  $p_1$  de estar en el estado  $|\psi\rangle$  y una probabilidad  $p_2 = 1 - p_1$  de estar en el estado  $|\psi_\perp\rangle$ , siendo  $|\psi_\perp\rangle$  el estado ortogonal a  $|\psi\rangle$ , es decir,

$$\langle \psi | \psi_\perp \rangle = 0. \tag{28}$$

En una base ortonormal, el vector  $|\psi\rangle$  se representa como:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{29}$$

siendo  $a$  y  $b$  números complejos tales que:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{30}$$

Obtégase la matriz densidad de la mezcla y las componentes del vector de Bloch en términos de las componentes  $a$  y  $b$  de  $|\psi\rangle$ .

## Sección 1

El formalismo de mezclas estadísticas establece que la matriz densidad  $\hat{\rho}$  de un ensamble cuántico se define como la suma ponderada de los proyectores de los estados puros que lo componen:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

Para el sistema de dos niveles dado, las probabilidades de ocupación y los estados son:

$$p_1 = p_1, \quad |\varphi_1\rangle = |\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$p_2 = 1 - p_1, \quad |\varphi_2\rangle = |\psi_\perp\rangle$$

La condición de ortonormalidad para la base conformada por el estado y su complemento ortogonal es:

$$\langle\psi|\psi_\perp\rangle = 0$$

La relación de completitud (resolución de la identidad) impuesta por esta base ortonormal bidimensional es:

$$\hat{I} = |\psi\rangle\langle\psi| + |\psi_\perp\rangle\langle\psi_\perp|$$

Cualquier matriz densidad de un sistema de dos niveles puede parametrizarse unívocamente mediante el vector de Bloch  $\vec{r}$  y el vector de matrices de Pauli  $\vec{\hat{\sigma}}$ :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left( \hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\hat{\sigma}} \right)$$

Las componentes del vector de Bloch  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  se extraen invirtiendo esta relación mediante la traza:

$$r_i = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_i)$$

Las matrices de Pauli en la base computacional estándar son:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

## Sección 2

Construimos la matriz densidad de la mezcla estadística a partir de su definición fundamental:

$$\hat{\rho} = p_1 |\psi\rangle\langle\psi| + (1 - p_1) |\psi_\perp\rangle\langle\psi_\perp|$$

Aplicamos la relación de completitud para expresar el proyector ortogonal exclusivamente en términos de  $|\psi\rangle$ :

$$|\psi_{\perp}\rangle\langle\psi_{\perp}| = \hat{I} - |\psi\rangle\langle\psi|$$

Sustituimos este proyector en la matriz densidad para eliminar la dependencia explícita de  $|\psi_{\perp}\rangle$ :

$$\hat{\rho} = p_1|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - p_1) \left( \hat{I} - |\psi\rangle\langle\psi| \right)$$

Agrupamos los términos algebraicos proporcionales al proyector  $|\psi\rangle\langle\psi|$ :

$$\hat{\rho} = (2p_1 - 1)|\psi\rangle\langle\psi| + (1 - p_1)\hat{I}$$

Evaluamos explícitamente el operador de proyección exterior para el estado puro  $|\psi\rangle$ :

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos la representación matricial del proyector en la expresión reducida de la matriz densidad:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= (2p_1 - 1) \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - p_1 & 0 \\ 0 & 1 - p_1 \end{pmatrix} \\ \hat{\rho} &= \begin{pmatrix} (2p_1 - 1)|a|^2 + 1 - p_1 & (2p_1 - 1)ab^* \\ (2p_1 - 1)a^*b & (2p_1 - 1)|b|^2 + 1 - p_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicamos la condición de normalización geométrica  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  para expandir el elemento de la diagonal  $\rho_{11}$ :

$$\rho_{11} = 2p_1|a|^2 - |a|^2 + 1 - p_1 = 2p_1|a|^2 - |a|^2 + (|a|^2 + |b|^2) - p_1(|a|^2 + |b|^2)$$

$$\rho_{11} = p_1|a|^2 + (1 - p_1)|b|^2$$

Expandimos el elemento de la diagonal  $\rho_{22}$  mediante la misma condición de normalización:

$$\rho_{22} = 2p_1|b|^2 - |b|^2 + 1 - p_1 = 2p_1|b|^2 - |b|^2 + (|a|^2 + |b|^2) - p_1(|a|^2 + |b|^2)$$

$$\rho_{22} = p_1|b|^2 + (1 - p_1)|a|^2$$

Calculamos la componente  $r_x$  del vector de Bloch tomando la traza sobre  $\hat{\sigma}_x$ :

$$r_x = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} \rho_{12} & \rho_{11} \\ \rho_{22} & \rho_{21} \end{pmatrix}$$

$$r_x = \rho_{12} + \rho_{21} = (2p_1 - 1)ab^* + (2p_1 - 1)a^*b$$

$$r_x = (2p_1 - 1)(ab^* + a^*b)$$

Calculamos la componente  $r_y$  mediante la traza sobre  $\hat{\sigma}_y$ :

$$r_y = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} i\rho_{12} & -i\rho_{11} \\ i\rho_{22} & -i\rho_{21} \end{pmatrix}$$

$$r_y = i(\rho_{12} - \rho_{21}) = i[(2p_1 - 1)ab^* - (2p_1 - 1)a^*b]$$

$$r_y = i(2p_1 - 1)(ab^* - a^*b)$$

Calculamos la componente  $r_z$  evaluando la traza sobre  $\hat{\sigma}_z$ :

$$r_z = \text{Tr} \left[ \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} \rho_{11} & -\rho_{12} \\ \rho_{21} & -\rho_{22} \end{pmatrix}$$

$$r_z = \rho_{11} - \rho_{22} = [(2p_1 - 1)|a|^2 + 1 - p_1] - [(2p_1 - 1)|b|^2 + 1 - p_1]$$

$$r_z = (2p_1 - 1)(|a|^2 - |b|^2)$$

—

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} p_1|a|^2 + (1 - p_1)|b|^2 & (2p_1 - 1)ab^* \\ (2p_1 - 1)a^*b & p_1|b|^2 + (1 - p_1)|a|^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (2p_1 - 1)(ab^* + a^*b) \\ i(2p_1 - 1)(ab^* - a^*b) \\ (2p_1 - 1)(|a|^2 - |b|^2) \end{pmatrix}$$

Justificación Final: La matriz densidad resultante muestra cómo las poblaciones y coherencias se mezclan estadísticamente; equivalentemente, el vector de Bloch es idéntico al de un estado puro  $|\psi\rangle$  pero escalado por un factor de pureza de  $(2p_1 - 1)$ . En el límite de ignorancia máxima ( $p_1 = 1/2$ ), el factor se anula y el vector de Bloch colapsa al origen ( $\vec{r} = \vec{0}$ ), describiendo un estado máximamente mixto independiente de las amplitudes complejas iniciales  $a$  y  $b$ .

.....

• Una partícula de espín  $1/2$  se encuentra en un estado  $|\psi\rangle$  tal que los valores medios de las componentes del operador de espín  $S_x$  y  $S_y$  son:

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{4}, \quad \langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{3}. \quad (31)$$

- Determinense los estados  $|\psi\rangle$  que satisfacen las condiciones anteriores, en la base en la cual la componente  $S_z$  del espín es diagonal.
- En los estados obtenidos en el apartado (a), obténganse los valores medios de  $S_z$ .

## Sección 1

Un estado puro de un sistema de espín 1/2 se representa por un vector complejo normalizado en un espacio de Hilbert bidimensional. En la base autoestados del operador de la componente  $z$  del espín, este vector es:

$$|\psi\rangle = a|+_z\rangle + b|-_z\rangle$$

La conservación de la probabilidad impone la siguiente condición de normalización para los coeficientes:

$$\langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

El postulado fundamental de la medida establece que el valor esperado de cualquier observable físico representado por el operador hermítico  $\hat{A}$  se calcula proyectando la matriz del operador sobre el estado del sistema:

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

Los operadores para las tres componentes espaciales del espín se construyen algebraicamente a partir de las matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_i$ :

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_i$$

En la base ortonormal donde  $\hat{S}_z$  es diagonal, la representación matricial canónica de los operadores de Pauli es:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Sección 2

Para el apartado (a), evaluamos explícitamente el valor medio del operador  $\hat{S}_x$  ejecutando la multiplicación matricial:

$$\langle\hat{S}_x\rangle = (a^* \quad b^*) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\langle\hat{S}_x\rangle = \frac{\hbar}{2} (a^* \quad b^*) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\langle\hat{S}_x\rangle = \frac{\hbar}{2} (a^*b + ab^*)$$

Igualamos el resultado analítico con la condición límite impuesta por el problema para la componente  $x$ :

$$\frac{\hbar}{2}(a^*b + ab^*) = \frac{\hbar}{4}$$

$$a^*b + ab^* = \frac{1}{2}$$

Procedemos de manera idéntica para evaluar el valor medio del operador  $\hat{S}_y$ :

$$\langle \hat{S}_y \rangle = (a^* \quad b^*) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle = \frac{\hbar}{2} (a^* \quad b^*) \begin{pmatrix} -ib \\ ia \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{S}_y \rangle = \frac{i\hbar}{2} (ab^* - a^*b)$$

Igualamos con la segunda condición límite impuesta para la componente  $y$ :

$$\frac{i\hbar}{2} (ab^* - a^*b) = \frac{\hbar}{3}$$

$$ab^* - a^*b = -\frac{2i}{3}$$

Definimos el producto complejo cruzado en términos de su parte real e imaginaria:

$$ab^* = x + iy$$

Sustituimos esta parametrización en el sistema de dos ecuaciones algebraicas obtenido:

$$(x - iy) + (x + iy) = 2x = \frac{1}{2}$$

$$(x + iy) - (x - iy) = 2iy = -\frac{2i}{3}$$

Resolvemos trivialmente para las partes real e imaginaria del producto:

$$x = \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

$$ab^* = \frac{1}{4} - i\frac{1}{3}$$

Para extraer información sobre las magnitudes individuales, calculamos el módulo al cuadrado de esta cantidad:

$$|ab^*|^2 = |a|^2|b|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$|a|^2|b|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{9} = \frac{25}{144}$$

Insertamos la relación fundamental de normalización  $|b|^2 = 1 - |a|^2$  para obtener una ecuación polinómica de una variable:

$$|a|^2(1 - |a|^2) = \frac{25}{144}$$

$$|a|^4 - |a|^2 + \frac{25}{144} = 0$$

Aplicamos la fórmula resolvente para polinomios cuadráticos en la variable  $|a|^2$ :

$$|a|^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{25}{144}\right)}}{2}$$

$$|a|^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{100}{144}}}{2}$$

$$|a|^2 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{44}{144}}}{2}$$

$$|a|^2 = \frac{1 \pm \frac{2\sqrt{11}}{12}}{2}$$

$$|a|^2 = \frac{6 \pm \sqrt{11}}{12}$$

Este resultado dictamina dos conjuntos de probabilidades válidas para los coeficientes:

$$|a| = \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{11}}{12}}$$

$$|b| = \sqrt{1 - |a|^2} = \sqrt{\frac{6 \mp \sqrt{11}}{12}}$$

Dado que la fase global de todo estado cuántico es inobservable, imponemos la convención de tomar la amplitud  $a$  estrictamente real y positiva:

$$a = \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{11}}{12}}$$

Determinamos ahora la fase relativa del estado  $\varphi_b$  a partir del producto cruzado previamente calculado, definiendo  $b = |b|e^{i\varphi_b}$ :

$$ab^* = a|b|e^{-i\varphi_b} = \frac{1}{4} - i\frac{1}{3}$$

Observamos que el producto invariante de los módulos es fijo sin importar el signo elegido:

$$a|b| = \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$$

Despejamos el término exponencial de la fase de la amplitud inferior:

$$e^{-i\varphi_b} = \frac{12}{5} \left( \frac{1}{4} - i\frac{1}{3} \right)$$

$$e^{-i\varphi_b} = \frac{3}{5} - i\frac{4}{5}$$

Tomando la conjugación compleja, establecemos el factor de fase de la amplitud  $b$ :

$$e^{i\varphi_b} = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$$

Reconstruimos la forma matemática final del coeficiente  $b$ :

$$b = \sqrt{\frac{6 \mp \sqrt{11}}{12}} \left( \frac{3}{5} + i\frac{4}{5} \right)$$

Para resolver el apartado (b), proyectamos el operador matricial de  $\hat{S}_z$  utilizando la definición del valor medio:

$$\langle \hat{S}_z \rangle = (a^* \quad b^*) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \frac{\hbar}{2} (|a|^2 - |b|^2)$$

Inyectamos los valores analíticos de las probabilidades  $|a|^2$  y  $|b|^2$  hallados de la ecuación cuadrática:

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \left( \frac{6 \pm \sqrt{11}}{12} - \frac{6 \mp \sqrt{11}}{12} \right)$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\pm 2\sqrt{11}}{12} \right)$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \pm \frac{\sqrt{11}}{12} \hbar$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$|\psi_{\pm}\rangle = \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{11}}{12}} |+_z\rangle + \sqrt{\frac{6 \mp \sqrt{11}}{12}} \left( \frac{3}{5} + i \frac{4}{5} \right) |-_z\rangle$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \pm \frac{\sqrt{11}}{12} \hbar$$

Justificación Final: La multiplicidad en las soluciones denota el principio de conservación de la norma del vector de Bloch  $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle^2 = \langle \hat{S}_x \rangle^2 + \langle \hat{S}_y \rangle^2 + \langle \hat{S}_z \rangle^2 = \hbar^2/4$  dictado para todos los estados puros. Una vez constreñidas dos proyecciones cartesianas ortogonales, la magnitud de la proyección sobre el tercer eje queda rígidamente fijada, introduciendo como único grado de libertad de su polarización la elección en la orientación a lo largo del semieje transversal remanente.

.....

• Sean  $a$  y  $a^\dagger$  los operadores escalera de un oscilador armónico unidimensional. Considérese un sistema cuyo hamiltoniano es:

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega\lambda a^\dagger a^2 a^\dagger, \quad (32)$$

siendo  $\omega$  y  $\lambda$  constantes reales positivas.

En el instante inicial  $t = 0$ , el sistema está en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle), \quad (33)$$

siendo  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  el estado fundamental y el primer estado excitado del sistema, respectivamente.

- Obtégase el estado del sistema  $|\psi(t)\rangle$  en un instante de tiempo  $t > 0$ .
- Si en el instante de tiempo  $t > 0$  se mide el observable

$$O = a + a^\dagger, \quad (34)$$

¿cuál será el valor medio obtenido en dichas medidas?

### Sección 1

La evolución temporal del sistema está gobernada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

El álgebra del oscilador armónico cuántico se define mediante la relación de conmutación canónica.

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

El operador número hermitiano cuenta los cuantos de excitación en la base de energía.

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

El hamiltoniano general del sistema se expresa a partir de los operadores de creación y aniquilación.

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger$$

El valor medio dependiente del tiempo para un observable genérico se define mediante el producto interno.

$$\langle \hat{O} \rangle_t = \langle \Psi(t) | \hat{O} | \Psi(t) \rangle$$

El estado inicial del sistema impone la condición de contorno para la ecuación diferencial.

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

La simetría del problema radica en que la perturbación está compuesta por productos de operadores escalera, lo que sugiere que el hamiltoniano total podría conservar la base original  $|n\rangle$  si el operador no lineal resulta diagonal en ella.

## Sección 2

Reescribimos la parte central del término de perturbación utilizando la relación de conmutación.

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 = \hat{N} + 1$$

Sustituimos algebraicamente esta identidad en el producto de cuatro operadores.

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}\hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger = \hat{N}(\hat{N} + 1) = \hat{N}^2 + \hat{N}$$

El hamiltoniano total se reescribe exactamente en función del operador número, demostrando que es diagonal en la base  $|n\rangle$ .

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega\lambda(\hat{N}^2 + \hat{N})$$

Calculamos la acción del hamiltoniano sobre un autoestado arbitrario para extraer su autovalor exacto.

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} + \lambda n(n+1) \right) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

Determinamos las energías estables para el estado fundamental y el primer estado excitado.

$$E_0 = \hbar\omega \left( 0 + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$E_1 = \hbar\omega \left( 1 + \frac{1}{2} + \lambda(1)(2) \right) = \hbar\omega \left( \frac{3}{2} + 2\lambda \right)$$

Aplicamos el operador de evolución temporal unitario a la superposición lineal del estado inicial.

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle \right)$$

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_0t/\hbar}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle$$

Separamos el cálculo del valor medio del observable hermítico por la linealidad del producto interno.

$$\langle \hat{O} \rangle_t = \langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \hat{a}^\dagger | \Psi(t) \rangle$$

La acción del operador de aniquilación anula el estado base y desciende el estado excitado.

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

$$\hat{a}|1\rangle = |0\rangle$$

Aplicamos el operador  $\hat{a}$  sobre el ket evolucionado temporalmente.

$$\hat{a}|\Psi(t)\rangle = 0 + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar}|0\rangle$$

Proyectamos con el bra correspondiente para aislar el elemento de matriz cruzado.

$$\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iE_0t/\hbar}\langle 0| - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{iE_1t/\hbar}\langle 1| \right) \left( \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar}|0\rangle \right)$$

$$\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iE_0t/\hbar} \right) \left( \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar} \right) \langle 0|0\rangle$$

$$\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle = \frac{i}{2}e^{-i(E_1-E_0)t/\hbar}$$

Evaluamos explícitamente la diferencia de energías entre el primer estado excitado y el estado fundamental.

$$E_1 - E_0 = \hbar\omega \left( \frac{3}{2} + 2\lambda \right) - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega(1 + 2\lambda)$$

Sustituimos la brecha energética en el elemento de transición.

$$\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle = \frac{i}{2} e^{-i\omega(1+2\lambda)t}$$

El valor esperado del operador de creación se deduce directamente por conjugación compleja.

$$\langle \Psi(t) | \hat{a}^\dagger | \Psi(t) \rangle = (\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle)^* = -\frac{i}{2} e^{i\omega(1+2\lambda)t}$$

Combinamos ambos términos algebraicos para formar el observable completo.

$$\langle \hat{O} \rangle_t = \frac{i}{2} \left( e^{-i\omega(1+2\lambda)t} - e^{i\omega(1+2\lambda)t} \right)$$

Empleamos la identidad de Euler para compactar las exponenciales complejas puras en una función trigonométrica real.

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \text{sen } x \implies \frac{i}{2} (e^{-ix} - e^{ix}) = \text{sen } x$$

$$\langle \hat{O} \rangle_t = \text{sen}(\omega(1 + 2\lambda)t)$$

—

### Sección 3 (Síntesis)

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t/2} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega(\frac{3}{2}+2\lambda)t} |1\rangle$$

$$\langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger \rangle_t = \text{sen}(\omega(1 + 2\lambda)t)$$

El observable dependiente del tiempo refleja una oscilación armónica pura análoga a la posición; sin embargo, la presencia del acoplamiento anarmónico  $\lambda$  no rompe la coherencia del estado base, sino que incrementa la brecha energética elevando la frecuencia macroscópica de la oscilación de  $\omega$  a  $\omega(1 + 2\lambda)$ .

.....

• La matriz densidad  $\rho$  de un oscilador es:

$$\rho = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle \langle n|}{2^n}, \quad (35)$$

siendo  $C$  una constante y  $|n\rangle$  el  $n$ -ésimo autoestado del hamiltoniano del oscilador.

a) Obténgase la pureza

$$P = \text{Tr}(\rho^2) \quad (36)$$

del estado.

b) Obténgase la entropía de von Neumann del estado.

**Sección 1** Un sistema cuántico en un estado mixto se describe de manera completa mediante el operador matriz densidad  $\hat{\rho}$ . La conservación de la probabilidad exige que la traza del operador sea la unidad.

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$$

La traza de cualquier operador  $\hat{A}$  se evalúa mediante una base ortonormal completa del espacio de Hilbert, tal como la base de autoestados de energía del oscilador armónico  $|n\rangle$ .

$$\text{Tr}(\hat{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m | \hat{A} | m \rangle$$

El grado de mezcla cuántica se cuantifica a través de la pureza  $P$ , cuyo valor es 1 para estados puros y estrictamente menor que 1 para estados mixtos.

$$P = \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$$

La entropía de von Neumann  $S$  mide la falta de información o incertidumbre termodinámica del estado cuántico.

$$S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$$

La resolución algebraica de operadores exponenciales decae en sumas de series geométricas fundamentales en el límite de convergencia  $|x| < 1$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

**Sección 2** La matriz densidad se define explícitamente en la base de ocupación del oscilador.

$$\hat{\rho} = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |n\rangle \langle n|$$

Imponemos la condición de normalización proyectando el operador sobre la misma base para obtener la constante  $C$ .

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m | \left( C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |n\rangle \langle n| \right) | m \rangle$$

Extraemos los coeficientes escalares por la linealidad del producto interno.

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = C \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \langle m|n\rangle \langle n|m\rangle$$

Aplicamos la relación de ortonormalidad de los autoestados del oscilador.

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$$

La doble sumatoria se colapsa en una única serie debido a la delta de Kronecker.

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Evaluamos la serie geométrica convergente con parámetro constante  $x = 1/2$ .

$$C \left( \frac{1}{1 - 1/2} \right) = 2C = 1$$

Aislamos la constante de normalización.

$$C = \frac{1}{2}$$

Construimos la matriz densidad normalizada exacta del sistema.

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} |n\rangle \langle n|$$

Para calcular la pureza, aplicamos el cuadrado del operador hermitiano.

$$\hat{\rho}^2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} |n\rangle \langle n| \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} |m\rangle \langle m| \right)$$

Expandimos el producto tensorial colapsando nuevamente la proyección ortogonal  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ .

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} |n\rangle \langle n|$$

Consolidamos el operador resultante, diagonal en la misma base.

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} |n\rangle \langle n|$$

Aplicamos la definición de pureza tomando la traza de este operador al cuadrado.

$$P = \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^n$$

Evaluamos la nueva serie geométrica con parámetro  $x = 1/4$ .

$$P = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1 - 1/4} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{4}{3} \right)$$

Simplificamos el producto escalar para obtener el primer resultado solicitado.

$$P = \frac{1}{3}$$

Iniciamos el cálculo de la entropía de von Neumann utilizando los autovalores exactos  $p_n$  de la matriz densidad diagonalizada.

$$S = - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln p_n$$

Definimos la distribución de probabilidad estadística subyacente.

$$p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Evaluamos el logaritmo natural de la probabilidad individual.

$$\ln p_n = \ln \left( 2^{-(n+1)} \right) = -(n+1) \ln 2$$

Sustituimos el logaritmo en la sumatoria entrópica total.

$$S = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (-(n+1) \ln 2)$$

Factorizamos las constantes para estructurar una serie de potencias derivables.

$$S = \ln 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Identificamos la suma abstracta requerida, reescribiéndola mediante el operador derivada continua respecto a  $x$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (x^{n+1})$$

Conmutamos el operador diferencial con la sumatoria infinita asumiendo el radio de convergencia adecuado.

$$x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right)$$

Derivamos la función racional resultante empleando la regla del cociente.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) = \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Insertamos el diferencial en la relación analítica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Sustituimos el parámetro físico correspondiente al autovalor del oscilador.

$$x = \frac{1}{2}$$

Evaluamos numéricamente la sumatoria de potencias ponderadas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

Acoplamos el valor escalar de la serie infinita en la expresión final de la entropía.

$$S = 2 \ln 2$$

---

### Sección 3 (Síntesis)

$$P = \frac{1}{3}$$

$$S = 2 \ln 2$$

El operador describe un estado térmico del oscilador con pureza estrictamente menor a la unidad, demostrando su naturaleza de mezcla estadística clásica. La entropía refleja directamente esta decoherencia proyectando una distribución de ocupación que decrece exponencialmente, análoga a la distribución de Boltzmann donde el vacío y el primer estado excitado dominan la dispersión termodinámica.

.....

- En un sistema de dos partículas de espín 1/2 se definen los operadores:

$$P_{\alpha\beta} = \alpha + \beta \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\hbar^2}, \quad (37)$$

siendo  $\alpha$  y  $\beta$  dos constantes reales, y  $\vec{S}_1$  y  $\vec{S}_2$  los operadores de espín de cada una de las dos partículas.

- Obténanse los valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  para que  $P_{\alpha\beta}$  sea el proyector sobre los estados de espín total cero.

b) ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  el operador  $P_{\alpha\beta}$  es el proyector sobre los estados de espín total uno?

**Sección 1** El problema involucra el acoplamiento del momento angular intrínseco de dos fermiones idénticos. Postulamos el operador de espín total del sistema como la suma vectorial de los operadores individuales.

$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$$

El cuadrado del operador de espín total permite relacionar su magnitud con la interacción escalar entre ambas partículas.

$$\hat{S}^2 = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2) \cdot (\hat{S}_1 + \hat{S}_2) = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$$

Despejando el producto escalar fundamental, obtenemos la forma explícita que interviene en el operador propuesto.

$$\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 = \frac{1}{2} (\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2)$$

La ecuación de autovalores para el cuadrado de cualquier operador de momento angular está dada por la cuantización del momento.

$$\hat{J}^2 |j, m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m_j\rangle$$

Para cada partícula de espín  $s = 1/2$ , el operador de espín individual al cuadrado actúa de manera escalar sobre cualquier estado del espacio de Hilbert.

$$\hat{S}_i^2 |s_i, m_i\rangle = \hbar^2 s_i(s_i+1) |s_i, m_i\rangle$$

La suma de dos espines  $1/2$  genera un subespacio total descrito por el número cuántico de espín total  $s$ , el cual obedece las reglas de la adición de momento angular (serie de Clebsch-Gordan).

$$s = |s_1 - s_2| \dots s_1 + s_2$$

Un operador proyector ortogonal  $\hat{P}_k$  sobre un subespacio caracterizado por el autovalor  $k$  debe cumplir la condición de idempotencia y poseer autovalores exclusivamente binarios (1 para los estados pertenecientes al subespacio, 0 para el complemento ortogonal).

$$\hat{P}_k |\psi_k\rangle = 1 |\psi_k\rangle$$

$$\hat{P}_k |\psi_{j \neq k}\rangle = 0 |\psi_{j \neq k}\rangle$$

---

## Sección 2

Sustituimos el valor del número cuántico  $s_1 = s_2 = 1/2$  para evaluar los autovalores de los operadores individuales.

$$\hat{S}_1^2 |s, m\rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) |s, m\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |s, m\rangle$$

$$\hat{S}_2^2 |s, m\rangle = \hbar^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) |s, m\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |s, m\rangle$$

Aplicamos las reglas de adición de momento angular para determinar los valores posibles del espín total  $s$ .

$$s \in \{1/2 - 1/2, 1/2 + 1/2\}$$

$$s \in \{0, 1\}$$

Calculamos la acción del operador de espín total al cuadrado sobre los estados singulete ( $s = 0$ ) y triplete ( $s = 1$ ).

$$\hat{S}^2 |0, 0\rangle = \hbar^2 (0)(0 + 1) |0, 0\rangle = 0$$

$$\hat{S}^2 |1, m\rangle = \hbar^2 (1)(1 + 1) |1, m\rangle = 2\hbar^2 |1, m\rangle$$

Aplicamos el operador del producto escalar  $\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$  sobre el estado singulete, sustituyendo los autovalores previos.

$$\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 |0, 0\rangle = \frac{1}{2} \left( 0 - \frac{3}{4} \hbar^2 - \frac{3}{4} \hbar^2 \right) |0, 0\rangle$$

$$\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 |0, 0\rangle = -\frac{3}{4} \hbar^2 |0, 0\rangle$$

Evaluamos la acción del mismo operador sobre los estados del triplete.

$$\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 |1, m\rangle = \frac{1}{2} \left( 2\hbar^2 - \frac{3}{4} \hbar^2 - \frac{3}{4} \hbar^2 \right) |1, m\rangle$$

$$\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 |1, m\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{8}{4} \hbar^2 - \frac{6}{4} \hbar^2 \right) |1, m\rangle = \frac{1}{4} \hbar^2 |1, m\rangle$$

Introducimos estos autovalores en la definición del operador general  $\hat{P}_{\alpha\beta}$  al actuar sobre el estado singulete.

$$\hat{P}_{\alpha\beta} |0, 0\rangle = \left( \alpha + \beta \frac{1}{\hbar^2} \left( -\frac{3}{4} \hbar^2 \right) \right) |0, 0\rangle$$

$$\hat{P}_{\alpha\beta} |0, 0\rangle = \left( \alpha - \frac{3}{4} \beta \right) |0, 0\rangle$$

Para que  $\hat{P}_{\alpha\beta}$  sea un proyector sobre el estado de espín total cero (singulete), debe cumplir simultáneamente:

$$\alpha - \frac{3}{4}\beta = 1$$

$$\alpha + \frac{1}{4}\beta = 0$$

Resolvemos el sistema lineal para el proyector del singulete despejando  $\alpha$  de la segunda ecuación.

$$\alpha = -\frac{1}{4}\beta$$

Sustituimos en la primera ecuación para determinar  $\beta$ .

$$-\frac{1}{4}\beta - \frac{3}{4}\beta = 1$$

$$-\beta = 1 \implies \beta = -1$$

Encontramos el parámetro correspondiente  $\alpha$ .

$$\alpha = -\frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{4}$$

Determinamos las condiciones para que  $\hat{P}_{\alpha\beta}$  sea el proyector sobre los estados de espín total uno (triplete).

$$\alpha - \frac{3}{4}\beta = 0$$

$$\alpha + \frac{1}{4}\beta = 1$$

Resolvemos el nuevo sistema algebraico restando la primera ecuación de la segunda.

$$\left(\alpha + \frac{1}{4}\beta\right) - \left(\alpha - \frac{3}{4}\beta\right) = 1 - 0$$

$$\beta = 1$$

Sustituimos el valor de  $\beta$  en la primera ecuación para obtener  $\alpha$ .

$$\alpha - \frac{3}{4}(1) = 0 \implies \alpha = \frac{3}{4}$$

Comprobamos analíticamente la completitud sumando ambos proyectores resultantes.

$$\hat{P}_{s=0} + \hat{P}_{s=1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2}{\hbar^2}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2}{\hbar^2}\right) = 1$$

### Sección 3 (Síntesis)

$$\alpha_{s=0} = \frac{1}{4}, \quad \beta_{s=0} = -1 \implies \hat{P}_{s=0} = \frac{1}{4} - \frac{\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2}{\hbar^2}$$

$$\alpha_{s=1} = \frac{3}{4}, \quad \beta_{s=1} = 1 \implies \hat{P}_{s=1} = \frac{3}{4} + \frac{\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2}{\hbar^2}$$

El formalismo de proyección aprovecha los autovalores distintos del operador de interacción de intercambio espín-espín de Heisenberg-Dirac para construir filtros algebraicos exactos, aislando las componentes de simetría antisimétrica (singulete) y simétrica (tripleto) del espacio de Hilbert sin modificar la dimensionalidad total del sistema.

.....

• Un oscilador armónico unidimensional se encuentra, en los instantes  $t < 0$ , en su estado fundamental  $|0\rangle$ . En el instante  $t = 0$ , una fuerza exterior actúa sobre el oscilador de manera que su vector de estado se convierte en:

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}cP}|0\rangle, \tag{38}$$

siendo  $c$  una constante real y  $P$  el operador momento.

- a) ¿A qué corresponde el cambio de estado  $|0\rangle \rightarrow |\psi(0)\rangle$ ?
- b) Supóngase que el oscilador se deja evolucionar a partir de  $t \geq 0$  de forma que su estado inicial es  $|\psi(0)\rangle$ . Obténgase el vector de estado  $|\psi(t)\rangle$  para todo  $t \geq 0$  en términos de los autoestados de la energía del oscilador.
- c) Calcúlese el valor medio de la posición de la partícula para  $t \geq 0$ .

### Sección 1

La dinámica del oscilador armónico unidimensional está gobernada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

El hamiltoniano del sistema se define en términos de los operadores posición  $\hat{X}$  y momento  $\hat{P}$ , o equivalentemente, en términos de los operadores de aniquilación  $\hat{a}$  y creación  $\hat{a}^\dagger$ .

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Los operadores hermíticos de posición y momento se expresan como combinaciones lineales de los operadores escalera.

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

La relación de conmutación canónica entre los operadores escalera es fundamental para el álgebra del oscilador.

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

El operador de evolución temporal unitario que rige el estado para  $t \geq 0$  es la exponencial del hamiltoniano.

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)$$

El valor medio de un observable físico  $\hat{A}$  en un instante  $t$  se obtiene mediante el producto interno en el espacio de Hilbert.

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$$

—

## Sección 2

Evaluamos el efecto del operador  $\exp(-ic\hat{P}/\hbar)$  proyectando sobre la base de posiciones  $|x\rangle$ .

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}c\hat{P}} | 0 \rangle = \langle x - c | 0 \rangle = \psi_0(x - c)$$

El cambio corresponde matemáticamente al operador de traslación espacial continua; el paquete de ondas del estado fundamental se desplaza rígidamente una distancia  $c$ .

Para encontrar la evolución temporal, reescribimos el operador de traslación sustituyendo la definición de  $\hat{P}$  en función de los operadores escalera.

$$-\frac{i}{\hbar}c\hat{P} = -\frac{i}{\hbar}c \left[ i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right] = c\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

Definimos una constante real adimensional  $\alpha$  que parametriza el desplazamiento.

$$\alpha = c\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$$

El estado inicial se convierte en la aplicación del operador de desplazamiento  $\hat{D}(\alpha)$  sobre el vacío  $|0\rangle$ .

$$|\psi(0)\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha\hat{a}}|0\rangle$$

Aplicamos el lema de Baker-Campbell-Hausdorff, dado que el conmutador de los exponentes es un escalar y conmuta con ellos.

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

$$[\alpha\hat{a}^\dagger, -\alpha\hat{a}] = -\alpha^2[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -\alpha^2$$

Factorizamos el operador de desplazamiento separando las partes de creación y aniquilación.

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha\hat{a}} = e^{-\alpha^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha\hat{a}}$$

Aplicamos el operador factorizado al estado fundamental, usando la serie de Taylor para la aniquilación donde  $\hat{a}|0\rangle = 0$ .

$$e^{-\alpha\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\alpha^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

Expandimos la exponencial del operador de creación en serie de Taylor y aplicamos iterativamente la regla de normalización  $(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle$ .

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Aplicamos el operador de evolución temporal  $\hat{U}(t)$  utilizando la ecuación de autovalores  $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ .

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left( e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+1/2)t} |n\rangle$$

Factorizamos la fase global del punto cero de energía para aislar el parámetro dependiente del tiempo  $\alpha(t)$ .

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-\alpha^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha(t)\rangle$$

Calculamos el valor medio de la posición. Primero, demostramos rigurosamente que el estado coherente  $|\alpha(t)\rangle$  es autoestado del operador de aniquilación.

$$\hat{a}|\alpha(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{a}|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(t)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle$$

Desarrollamos el producto interno para  $\hat{X}$ , recordando que la fase global  $e^{-i\omega t/2}$  se cancela con su conjugada.

$$\langle \hat{X} \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha(t) | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \alpha(t) \rangle$$

$$\langle \hat{X} \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( \langle \alpha(t) | \hat{a}^\dagger | \alpha(t) \rangle + \langle \alpha(t) | \hat{a} | \alpha(t) \rangle \right)$$

Sustituimos el autovalor  $\alpha(t)$  y su complejo conjugado  $\alpha^*(t)$ .

$$\langle \hat{X} \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^*(t) + \alpha(t))$$

Desarrollamos en términos de la constante real original  $\alpha$  y frecuencias trigonométricas.

$$\alpha^*(t) + \alpha(t) = \alpha e^{i\omega t} + \alpha e^{-i\omega t} = 2\alpha \cos(\omega t)$$

$$\langle \hat{X} \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2\alpha \cos(\omega t)$$

Sustituimos el valor inicial de  $\alpha$  definido a partir del desplazamiento físico  $c$ .

$$\langle \hat{X} \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2 \left( c \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \right) \cos(\omega t)$$

$$\langle \hat{X} \rangle_t = c \cos(\omega t)$$

---

### Sección 3 (Síntesis)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}} e^{-\frac{m\omega c^2}{4\hbar}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( c \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} e^{-i\omega t} \right)^n |n\rangle$$

$$\langle \hat{X} \rangle_t = c \cos(\omega t)$$

El cambio de estado corresponde al operador de traslación espacial, el cual convierte el estado fundamental en un estado coherente desplazado. La evolución temporal preserva la naturaleza del estado coherente, y el valor esperado de la posición sigue exactamente la trayectoria de un oscilador armónico clásico con amplitud inicial  $c$ .

.....

• El hamiltoniano de una partícula de espín 1/2 es:

$$H = -\hbar\mu\sigma_y, \quad (39)$$

siendo  $\mu$  una constante real.

En el instante inicial  $t = 0$ , el sistema está en un estado caracterizado por la matriz densidad:

$$\rho(0) = \frac{1}{2} \left( I + \frac{1}{2}\sigma_x \right). \quad (40)$$

- Obtégase la matriz densidad para  $t \geq 0$ . ¿Cuánto vale el vector de Bloch?
- Obtégase el valor medio del operador de espín  $\vec{S}$  para  $t \geq 0$ . ¿Para qué valores del tiempo  $t$  está  $\langle \vec{S} \rangle$  dirigido a lo largo del eje  $z$ ?

### Sección 1

La evolución temporal de un estado cuántico descrito por una matriz densidad  $\hat{\rho}(t)$  obedece la ecuación de von Neumann.

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]$$

Para un hamiltoniano  $\hat{H}$  independiente del tiempo, la solución general se expresa mediante el operador de evolución temporal unitario  $\hat{U}(t)$ .

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t)$$

El operador de evolución se define como la exponencial del hamiltoniano.

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)$$

Para un sistema de espín 1/2, cualquier matriz densidad se puede parametrizar unívocamente en función del vector de Bloch  $\vec{n}(t) \in \mathbb{R}^3$ , donde  $\hat{I}$  es la matriz identidad de orden 2 y  $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$  es el vector de matrices de Pauli.

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} \left( \hat{I} + \vec{n}(t) \cdot \hat{\sigma} \right)$$

El operador de espín  $\hat{S}$  se define a partir de las matrices de Pauli.

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$$

El valor medio de un observable vectorial como el espín se determina mediante la traza del producto de la matriz densidad por el operador.

$$\langle \hat{S} \rangle_t = \text{Tr} \left( \hat{\rho}(t) \hat{S} \right)$$

El álgebra fundamental de las matrices de Pauli viene gobernada por sus relaciones de anticonmutación y conmutación.

$$\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j\} = 2\delta_{ij}\hat{I}$$

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$$

## Sección 2

Sustituimos el hamiltoniano dado  $\hat{H} = -\hbar\mu\hat{\sigma}_y$  en la definición del operador de evolución.

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(-\hbar\mu\hat{\sigma}_y)t\right) = \exp(i\mu t\hat{\sigma}_y)$$

Expandimos el operador exponencial en serie de Taylor, aprovechando la propiedad involutiva de las matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_y^2 = \hat{I}$ .

$$\hat{U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\mu t\hat{\sigma}_y)^k}{k!} = \cos(\mu t)\hat{I} + i\text{sen}(\mu t)\hat{\sigma}_y$$

El operador adjunto  $\hat{U}^\dagger(t)$  se obtiene invirtiendo el signo del exponente imaginario.

$$\hat{U}^\dagger(t) = \cos(\mu t)\hat{I} - i\text{sen}(\mu t)\hat{\sigma}_y$$

Introducimos el estado inicial  $\hat{\rho}(0)$  en la ecuación de evolución temporal.

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \left[ \frac{1}{2} \left( \hat{I} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_x \right) \right] \hat{U}^\dagger(t)$$

Distribuimos la evolución sobre los términos del estado inicial. Dado que la identidad conmuta con cualquier operador, su evolución es invariante.

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{4}\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t)$$

Sustituimos las expansiones trigonométricas de los operadores de evolución para transformar el término dependiente de  $\hat{\sigma}_x$ .

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = \left( \cos(\mu t)\hat{I} + i\text{sen}(\mu t)\hat{\sigma}_y \right) \hat{\sigma}_x \left( \cos(\mu t)\hat{I} - i\text{sen}(\mu t)\hat{\sigma}_y \right)$$

Multiplicamos el primer binomio por  $\hat{\sigma}_x$ .

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = (\cos(\mu t)\hat{\sigma}_x + i\sin(\mu t)\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x) \left( \cos(\mu t)\hat{I} - i\sin(\mu t)\hat{\sigma}_y \right)$$

Aplicamos la regla del producto de matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = -i\hat{\sigma}_z$  al primer factor.

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = (\cos(\mu t)\hat{\sigma}_x + \sin(\mu t)\hat{\sigma}_z) \left( \cos(\mu t)\hat{I} - i\sin(\mu t)\hat{\sigma}_y \right)$$

Desarrollamos el producto algebraico de los dos binomios resultantes.

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = \cos^2(\mu t)\hat{\sigma}_x - i\cos(\mu t)\sin(\mu t)\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \sin(\mu t)\cos(\mu t)\hat{\sigma}_z - i\sin^2(\mu t)\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y$$

Aplicamos las relaciones algebraicas  $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_z$  y  $\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = -i\hat{\sigma}_x$  en los términos cruzados.

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = \cos^2(\mu t)\hat{\sigma}_x - i\cos(\mu t)\sin(\mu t)(i\hat{\sigma}_z) + \sin(\mu t)\cos(\mu t)\hat{\sigma}_z - i\sin^2(\mu t)(-i\hat{\sigma}_x)$$

Simplificamos la unidad imaginaria para consolidar componentes.

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = \cos^2(\mu t)\hat{\sigma}_x + \cos(\mu t)\sin(\mu t)\hat{\sigma}_z + \sin(\mu t)\cos(\mu t)\hat{\sigma}_z - \sin^2(\mu t)\hat{\sigma}_x$$

Agrupamos las matrices de Pauli factorizando sus coeficientes temporales.

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = \left( \cos^2(\mu t) - \sin^2(\mu t) \right) \hat{\sigma}_x + (2\sin(\mu t)\cos(\mu t)) \hat{\sigma}_z$$

Reducimos la expresión utilizando identidades de ángulos dobles trigonométricos.

$$\hat{U}(t)\hat{\sigma}_x\hat{U}^\dagger(t) = \cos(2\mu t)\hat{\sigma}_x + \sin(2\mu t)\hat{\sigma}_z$$

Sustituimos el término rotado en la matriz densidad completa dependiente del tiempo.

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{4}(\cos(2\mu t)\hat{\sigma}_x + \sin(2\mu t)\hat{\sigma}_z)$$

Comparamos esta expresión con la definición formal paramétrica del vector de Bloch para aislar sus componentes.

$$\frac{1}{2}\vec{n}(t) \cdot \hat{\sigma} = \frac{1}{4}\cos(2\mu t)\hat{\sigma}_x + \frac{1}{4}\sin(2\mu t)\hat{\sigma}_z$$

Multiplicando por 2, extraemos el vector de Bloch explícito en forma de tupla cartesiana.

$$\vec{n}(t) = \left( \frac{1}{2}\cos(2\mu t), 0, \frac{1}{2}\sin(2\mu t) \right)$$

Calculamos ahora el valor medio del espín empleando su linealidad respecto al vector de Bloch. Puesto que  $\text{Tr}(\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j) = 2\delta_{ij}$ , la traza se reduce al producto escalar de los vectores.

$$\langle \hat{S} \rangle_t = \frac{\hbar}{2} \vec{n}(t)$$

Sustituimos el vector de Bloch para obtener las componentes del valor esperado del espín.

$$\langle \hat{S} \rangle_t = \left( \frac{\hbar}{4} \cos(2\mu t), 0, \frac{\hbar}{4} \operatorname{sen}(2\mu t) \right)$$

Para que el vector de espín esté completamente dirigido a lo largo del eje  $z$ , las componentes transversales (en este caso, la componente en  $x$ ) deben ser estrictamente nulas.

$$\langle \hat{S}_x \rangle_t = \frac{\hbar}{4} \cos(2\mu t) = 0$$

Resolvemos la ecuación trigonométrica de anulación para el argumento temporal.

$$2\mu t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Despejamos la variable de tiempo  $t$  asumiendo la positividad requerida  $t \geq 0$ .

$$t = \frac{\pi(2k+1)}{4\mu}$$

—

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} \hat{I} + \frac{1}{4} \cos(2\mu t) \hat{\sigma}_x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\mu t) \hat{\sigma}_z$$

$$\vec{n}(t) = \left( \frac{1}{2} \cos(2\mu t), 0, \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\mu t) \right)$$

$$\langle \hat{S} \rangle_t = \left( \frac{\hbar}{4} \cos(2\mu t), 0, \frac{\hbar}{4} \operatorname{sen}(2\mu t) \right)$$

$$t = \frac{\pi(2k+1)}{4|\mu|}, \quad k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$$

Justificación Final: El resultado describe la precesión de Larmor del estado de espín alrededor del eje  $y$  (dirección del "campo magnético" efectivo implícito en el hamiltoniano) con una frecuencia angular  $2\mu$ . La componente del espín inicialmente en  $x$  gira cíclicamente hacia el eje  $z$ , logrando alinearse o antialinearse puramente con la dirección  $z$  en los instantes impares de los cuartos de período temporal.

.....

- Una partícula de masa  $m$  se mueve en la dirección del eje  $x$  bajo la acción del potencial:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \lambda e^{-\alpha x^2}, \quad (41)$$

siendo  $\omega$  y  $\alpha$  dos constantes reales positivas y  $\lambda$  una constante real pequeña. Obténgase, a primer orden en  $\lambda$ , la energía del estado fundamental del sistema.

### Sección 1

El hamiltoniano total del sistema cuántico unidimensional se define como la suma de un operador principal no perturbado y un operador de perturbación.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

El hamiltoniano no perturbado corresponde al de un oscilador armónico cuántico.

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

La perturbación es el potencial espacial dado por la función gaussiana.

$$\hat{H}' = \lambda \exp(-\alpha\hat{x}^2)$$

La ecuación de autovalores para el sistema libre de perturbación es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

$$\hat{H}_0|n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|n^{(0)}\rangle$$

De acuerdo con la teoría de perturbaciones independiente del tiempo, la energía de un estado a primer orden se aproxima mediante la expansión perturbativa truncada.

$$E_0 \approx E_0^{(0)} + E_0^{(1)}$$

La corrección energética de primer orden se define rigurosamente como el valor esperado del operador perturbación evaluado sobre el estado no perturbado.

$$E_0^{(1)} = \langle 0^{(0)}|\hat{H}'|0^{(0)}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x)\hat{H}'\psi_0(x)dx$$

La función de onda exacta del estado fundamental del oscilador armónico no perturbado en la representación de posiciones es conocida.

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

---

### Sección 2

La energía del estado fundamental del hamiltoniano del oscilador armónico puro corresponde a la energía del punto cero.

$$E_0^{(0)} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Sustituimos la función de onda espacial del estado fundamental y la forma funcional del potencial perturbativo en la integral de corrección de primer orden.

$$E_0^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \right] [\lambda \exp(-\alpha x^2)] \left[ \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \right] dx$$

Extraemos todas las constantes escalares fuera de la integral temporal y agrupamos las amplitudes espaciales.

$$E_0^{(1)} = \lambda \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \exp(-\alpha x^2) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) dx$$

Sumamos algebraicamente los argumentos de las funciones exponenciales en el integrando.

$$E_0^{(1)} = \lambda \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - \alpha x^2\right) dx$$

Factorizamos la coordenada espacial cuadrática en el argumento de la exponencial para preparar la integración.

$$E_0^{(1)} = \lambda \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{m\omega}{\hbar} + \alpha\right)x^2\right) dx$$

La integral resultante es de la forma estándar de una integral gaussiana evaluada sobre todo el espacio.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Identificamos el parámetro constante real en nuestro integrando físico.

$$\beta = \frac{m\omega}{\hbar} + \alpha$$

Evaluamos explícitamente la integral gaussiana sustituyendo el parámetro físico deducido.

$$E_0^{(1)} = \lambda \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \left( \frac{\pi}{\frac{m\omega}{\hbar} + \alpha} \right)^{1/2}$$

Combinamos los factores multiplicativos bajo una raíz cuadrada común.

$$E_0^{(1)} = \lambda \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \frac{\pi}{\frac{m\omega}{\hbar} + \alpha} \right)^{1/2}$$

Cancelamos los factores geométricos comunes entre numerador y denominador.

$$E_0^{(1)} = \lambda \left( \frac{m\omega}{\hbar \left( \frac{m\omega}{\hbar} + \alpha \right)} \right)^{1/2}$$

Distribuimos la constante reducida de Planck en el denominador para simplificar la fracción final.

$$E_0^{(1)} = \lambda \left( \frac{m\omega}{m\omega + \alpha\hbar} \right)^{1/2}$$

Sumamos la energía no perturbada y la corrección de primer orden deducida para construir la solución energética total del problema.

$$E_0 \approx \frac{1}{2}\hbar\omega + \lambda\sqrt{\frac{m\omega}{m\omega + \alpha\hbar}}$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$E_0 \approx \frac{1}{2}\hbar\omega + \lambda\sqrt{\frac{m\omega}{m\omega + \alpha\hbar}}$$

Justificación Final: La expresión final representa la energía del estado fundamental ajustada a primer orden, compuesta por la energía del punto cero del oscilador armónico más una corrección inducida por la perturbación gaussiana. El término fraccionario bajo la raíz cuantifica estrictamente el solapamiento espacial entre la densidad de probabilidad del estado no perturbado y la anchura de la perturbación, modulando analíticamente el impacto del parámetro de intensidad  $\lambda$ .

.....

- Un sistema está formado por una partícula de espín 1/2 y un oscilador armónico unidimensional. Su vector de estado es:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |\alpha\rangle + i|-\rangle \otimes |\beta\rangle), \quad (42)$$

siendo  $|\pm\rangle$  los estados de la partícula de espín 1/2 tales que

$$\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle, \quad (43)$$

y  $|\alpha\rangle$  y  $|\beta\rangle$  los siguientes vectores de estado del oscilador:

$$|\alpha\rangle = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} |n\rangle, \quad (44)$$

$$|\beta\rangle = 2\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} |n\rangle. \quad (45)$$

- Obtégase la matriz densidad reducida para la partícula de espín 1/2.
- Obtégase la pureza y el vector de Bloch de la matriz densidad obtenida en el apartado anterior.

### Sección 1

El estado fundamental del sistema cuántico compuesto es un estado puro definido en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_O$ , descrito por el proyector del vector de estado.

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

La matriz densidad reducida del subsistema de espín  $\hat{\rho}_S$  se obtiene mediante la traza parcial sobre los grados de libertad del oscilador armónico.

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_O(\hat{\rho}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\hat{\rho}|n\rangle$$

La pureza  $P$  de un estado cuántico se define como la traza del cuadrado de la matriz densidad reducida.

$$P = \text{Tr}(\hat{\rho}_S^2)$$

El vector de Bloch  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  parametriza unívocamente cualquier matriz densidad de un sistema de dos niveles (espín  $1/2$ ) mediante los valores esperados de las matrices de Pauli  $\hat{\sigma}$ .

$$\hat{\rho}_S = \frac{1}{2} (\hat{I} + \vec{n} \cdot \hat{\sigma})$$

$$n_i = \text{Tr}(\hat{\rho}_S \hat{\sigma}_i)$$

La base de autoestados de Fock  $|n\rangle$  del oscilador armónico cumple con la condición de ortonormalidad.

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$$

—

## Sección 2

Expresamos el operador densidad del estado total puro.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|+\rangle \otimes |\alpha\rangle + i|-\rangle \otimes |\beta\rangle) (\langle +| \otimes \langle \alpha| - i\langle -| \otimes \langle \beta|)$$

Desarrollamos el producto exterior del estado compuesto.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| \otimes |\alpha\rangle\langle \alpha| - i|+\rangle\langle -| \otimes |\alpha\rangle\langle \beta| + i|-\rangle\langle +| \otimes |\beta\rangle\langle \alpha| + |-\rangle\langle -| \otimes |\beta\rangle\langle \beta|)$$

Aplicamos la traza parcial sobre el subespacio del oscilador.

$$\hat{\rho}_S = \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +|\langle \alpha|\alpha\rangle - i|+\rangle\langle -|\langle \beta|\alpha\rangle + i|-\rangle\langle +|\langle \alpha|\beta\rangle + |-\rangle\langle -|\langle \beta|\beta\rangle)$$

Calculamos el producto interno para verificar la normalización del estado  $|\alpha\rangle$ .

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{2^{m+1}} \langle m|n\rangle$$

Aplicamos la ortonormalidad de la base de Fock  $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ .

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Evaluamos la serie geométrica convergente.

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = \frac{3}{4} \left( \frac{1}{1 - 1/4} \right) = \frac{3}{4} \left( \frac{4}{3} \right) = 1$$

Calculamos el producto interno para verificar la normalización del estado  $|\beta\rangle$ .

$$\langle \beta|\beta\rangle = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{3^{m+1}} \delta_{mn}$$

Evaluamos la serie geométrica correspondiente.

$$\langle \beta|\beta\rangle = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^{n+1}} = \frac{8}{9} \left( \frac{1}{1 - 1/9} \right) = \frac{8}{9} \left( \frac{9}{8} \right) = 1$$

Calculamos el término de superposición (solapamiento)  $\langle \alpha|\beta\rangle$ .

$$\langle \alpha|\beta\rangle = \sqrt{3}(2\sqrt{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{3^{m+1}} \delta_{mn}$$

Simplificamos la expresión obteniendo una única suma geométrica.

$$\langle \alpha|\beta\rangle = 2\sqrt{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^{n+1}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Evaluamos la serie geométrica para el solapamiento.

$$\langle \alpha|\beta\rangle = \frac{\sqrt{6}}{3} \left( \frac{1}{1 - 1/6} \right) = \frac{\sqrt{6}}{3} \left( \frac{6}{5} \right) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Dado que todos los coeficientes son reales, se cumple la simetría del producto interno.

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \langle \alpha|\beta\rangle = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Sustituimos las normas y el solapamiento en la expresión de la matriz densidad reducida.

$$\hat{\rho}_S = \frac{1}{2} \left( |+\rangle\langle +| - i \frac{2\sqrt{6}}{5} |+\rangle\langle -| + i \frac{2\sqrt{6}}{5} |-\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| \right)$$

Representamos la matriz densidad reducida en la base canónica de espín  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ .

$$\hat{\rho}_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ i\frac{2\sqrt{6}}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el cuadrado de la matriz densidad reducida para evaluar la pureza.

$$\hat{\rho}_S^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ i\frac{2\sqrt{6}}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ i\frac{2\sqrt{6}}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Realizamos el producto matricial.

$$\hat{\rho}_S^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 & -2i\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ 2i\frac{2\sqrt{6}}{5} & 1 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos el valor del término cruzado cuadrático  $\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$ .

$$\hat{\rho}_S^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{49}{25} & -i\frac{4\sqrt{6}}{5} \\ i\frac{4\sqrt{6}}{5} & \frac{49}{25} \end{pmatrix}$$

Calculamos la traza del operador cuadrado.

$$P = \text{Tr}(\hat{\rho}_S^2) = \frac{1}{4} \left( \frac{49}{25} + \frac{49}{25} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{98}{25} \right) = \frac{49}{50}$$

Igualamos la representación matricial de  $\hat{\rho}_S$  con la parametrización del vector de Bloch.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ i\frac{2\sqrt{6}}{5} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & 1 - n_z \end{pmatrix}$$

Deducimos las componentes individuales del vector de Bloch mediante identificación directa de los elementos matriciales.

$$1 + n_z = 1 \implies n_z = 0$$

$$n_x - in_y = -i\frac{2\sqrt{6}}{5} \implies n_x = 0, \quad n_y = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$\hat{\rho}_S = \begin{pmatrix} 1/2 & -i\frac{\sqrt{6}}{5} \\ i\frac{\sqrt{6}}{5} & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{49}{50} = 0.98$$

$$\vec{n} = \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{5}, 0\right)$$

Justificación Final: La traza parcial genera un estado mixto para el espín en lugar de un estado puro ( $P < 1$ ), consecuencia directa del entrelazamiento entre el subsistema de espín y el del oscilador. La no ortogonalidad de los estados del oscilador ( $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ ) preserva ciertas coherencias cuánticas (elementos fuera de la diagonal), lo que impide que el estado colapse en una mezcla estadística total y confiere al vector de Bloch una magnitud  $\|\vec{n}\| < 1$  orientada sobre el eje  $y$ .

.....

- Dos partículas de espín 1/2 interactúan a través del hamiltoniano:

$$H = \hbar g \sigma_z \otimes \sigma_x, \tag{46}$$

siendo  $g$  una constante real.

En el instante inicial  $t = 0$ , el estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+, +\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-, -\rangle, \tag{47}$$

donde  $|s, s'\rangle = |s\rangle \otimes |s'\rangle$ , con  $s, s' = \pm$ , y  $\sigma_z|s\rangle = s|s\rangle$ .

Transcurrido un tiempo  $t > 0$ , se mide  $\sigma_z$  sobre el primer espín y se obtiene el valor +1.

- Si inmediatamente después de esta primera medida se mide  $\sigma_x$  para el segundo espín, ¿qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades?
- Supóngase que inmediatamente después de medir  $\sigma_z$  en el primer espín y obtener +1, se mide  $\sigma_x$  en el segundo espín. ¿Cuál será el valor medio de los resultados obtenidos? ¿Para qué valores de  $t > 0$  este valor medio es máximo?

### Sección 1

La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado está gobernada por la ecuación de Schrödinger, cuya solución formal define el operador de evolución temporal unitario.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right)$$

El hamiltoniano del sistema de dos partículas de espín 1/2 se expresa como el producto tensorial de los operadores de Pauli locales.

$$\hat{H} = \hbar g \hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}$$

Los autoestados del operador  $\hat{\sigma}_z$  conforman la base computacional del espacio de Hilbert para cada partícula.

$$\hat{\sigma}_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$$

Los operadores de Pauli poseen propiedades algebraicas fundamentales de involución.

$$\left(\hat{\sigma}_z^{(1)}\right)^2 = \hat{I}^{(1)}$$

$$\left(\hat{\sigma}_x^{(2)}\right)^2 = \hat{I}^{(2)}$$

La acción del operador  $\hat{\sigma}_x$  sobre la base de  $\hat{\sigma}_z$  invierte el estado de espín.

$$\hat{\sigma}_x|+\rangle = |-\rangle$$

$$\hat{\sigma}_x|-\rangle = |+\rangle$$

Los autoestados del operador  $\hat{\sigma}_x$ , que denotaremos como  $|\pm_x\rangle$ , se obtienen mediante la diagonalización de dicho operador y se expresan como superposiciones en la base de  $\hat{\sigma}_z$ .

$$\hat{\sigma}_x|\pm_x\rangle = \pm|\pm_x\rangle$$

$$|\pm_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$$

El postulado de la medida establece que, al obtener un autovalor discreto correspondiente a un proyector, el estado colapsa y debe ser renormalizado.

$$\hat{\Pi}_+^{(1)} = |+\rangle\langle+| \otimes \hat{I}^{(2)}$$

$$|\psi_f\rangle = \frac{\hat{\Pi}_+^{(1)}|\Psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle\Psi(t)|\hat{\Pi}_+^{(1)}|\Psi(t)\rangle}}$$

El valor esperado de un observable se define como la traza del operador respecto a la matriz densidad del estado, o el producto interno en el caso de estados puros.

$$\langle\hat{\sigma}_x^{(2)}\rangle = \langle\psi_f| \left(\hat{I}^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}\right) |\psi_f\rangle$$

---

## Sección 2

Para obtener la evolución temporal, calculamos el cuadrado del operador presente en el hamiltoniano.

$$\left(\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}\right)^2 = \left(\hat{\sigma}_z^{(1)}\right)^2 \otimes \left(\hat{\sigma}_x^{(2)}\right)^2$$

$$\left(\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}\right)^2 = \hat{I}^{(1)} \otimes \hat{I}^{(2)} = \hat{I}_{12}$$

Expandimos el operador de evolución temporal en su serie de Taylor, separando los términos pares e impares.

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-igt)^n \left(\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}\right)^n \\ \hat{U}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k}}{(2k)!} \hat{I}_{12} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-igt)^{2k+1}}{(2k+1)!} \left(\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}\right)\end{aligned}$$

Aplicamos las identidades de las series de potencias trigonométricas para obtener la forma cerrada del operador de evolución.

$$\hat{U}(t) = \hat{I}_{12} \cos(gt) - i \left(\hat{\sigma}_z^{(1)} \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}\right) \text{sen}(gt)$$

Aplicamos el operador de evolución al estado inicial del sistema.

$$\begin{aligned}|\Psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle \otimes |+\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-\rangle \otimes |-\rangle \\ |\Psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{U}(t) (|+\rangle \otimes |+\rangle) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\hat{U}(t) (|-\rangle \otimes |-\rangle)\end{aligned}$$

Calculamos la evolución del primer componente del estado inicial.

$$\hat{U}(t) (|+\rangle \otimes |+\rangle) = \cos(gt) (|+\rangle \otimes |+\rangle) - i \text{sen}(gt) \left(\hat{\sigma}_z^{(1)}|+\rangle \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}|+\rangle\right)$$

$$\hat{U}(t) (|+\rangle \otimes |+\rangle) = \cos(gt) (|+\rangle \otimes |+\rangle) - i \text{sen}(gt) (|+\rangle \otimes |-\rangle)$$

$$\hat{U}(t) (|+\rangle \otimes |+\rangle) = |+\rangle \otimes (\cos(gt)|+\rangle - i \text{sen}(gt)|-\rangle)$$

Calculamos la evolución del segundo componente del estado inicial.

$$\hat{U}(t) (|-\rangle \otimes |-\rangle) = \cos(gt) (|-\rangle \otimes |-\rangle) - i \text{sen}(gt) \left(\hat{\sigma}_z^{(1)}|-\rangle \otimes \hat{\sigma}_x^{(2)}|-\rangle\right)$$

$$\hat{U}(t) (|-\rangle \otimes |-\rangle) = \cos(gt) (|-\rangle \otimes |-\rangle) - i \text{sen}(gt) (|-\rangle \otimes |+\rangle)$$

$$\hat{U}(t) (|-\rangle \otimes |-\rangle) = |-\rangle \otimes (\cos(gt)|-\rangle + i \text{sen}(gt)|+\rangle)$$

Sustituimos para obtener el estado completo del sistema a un tiempo arbitrario.

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle \otimes (\cos(gt)|+\rangle - i \text{sen}(gt)|-\rangle) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-\rangle \otimes (\cos(gt)|-\rangle + i \text{sen}(gt)|+\rangle)$$

Aplicamos el proyector  $\hat{\Pi}_+^{(1)}$  para simular la medida con resultado +1 en el primer espín.

$$|\Phi(t)\rangle = \hat{\Pi}_+^{(1)}|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle \otimes (\cos(gt)|+\rangle - i \operatorname{sen}(gt)|-\rangle)$$

Calculamos la probabilidad del resultado de esta primera medida.

$$P_1(+1) = \langle \Phi(t) | \Phi(t) \rangle$$

$$P_1(+1) = \frac{1}{3} \left( \cos^2(gt) + \operatorname{sen}^2(gt) \right) = \frac{1}{3}$$

Renormalizamos el estado post-medida y aislamos el estado reducido del segundo espín.

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{1/3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle \otimes (\cos(gt)|+\rangle - i \operatorname{sen}(gt)|-\rangle) \right)$$

$$|\chi^{(2)}(t)\rangle = \cos(gt)|+\rangle - i \operatorname{sen}(gt)|-\rangle$$

Invertimos las relaciones de la base de  $\hat{\sigma}_x$  para expresar los kets  $|+\rangle$  y  $|-\rangle$ .

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+x\rangle + |-x\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+x\rangle - |-x\rangle)$$

Sustituimos estas relaciones en el estado del segundo espín.

$$|\chi^{(2)}(t)\rangle = \cos(gt) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|+x\rangle + |-x\rangle) \right] - i \operatorname{sen}(gt) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|+x\rangle - |-x\rangle) \right]$$

$$|\chi^{(2)}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(gt) - i \operatorname{sen}(gt)) |+x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(gt) + i \operatorname{sen}(gt)) |-x\rangle$$

Simplificamos las amplitudes utilizando la fórmula de Euler.

$$|\chi^{(2)}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-igt} |+x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{igt} |-x\rangle$$

Calculamos las probabilidades de obtener los valores +1 y -1 al medir  $\hat{\sigma}_x^{(2)}$ .

$$P_2(+1) = \left| \langle +x | \chi^{(2)}(t) \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-igt} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_2(-1) = \left| \langle -x | \chi^{(2)}(t) \rangle \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{igt} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

Calculamos el valor medio del observable  $\hat{\sigma}_x^{(2)}$  a partir de sus probabilidades.

$$\langle \hat{\sigma}_x^{(2)} \rangle = (+1)P_2(+1) + (-1)P_2(-1)$$

$$\langle \hat{\sigma}_x^{(2)} \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Al ser una función constante en el tiempo, evaluamos su maximización en el dominio  $t > 0$ .

$$\max_{t>0} \langle \hat{\sigma}_x^{(2)} \rangle = 0$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$P_2(+1) = \frac{1}{2}, \quad P_2(-1) = \frac{1}{2}, \quad \langle \hat{\sigma}_x^{(2)} \rangle = 0, \quad \forall t > 0$$

Justificación Final: Los resultados de medición proyectiva sobre  $\hat{\sigma}_x^{(2)}$  son equiprobables en todo instante posterior al colapso del primer espín, de modo que el valor esperado es invariablemente nulo a lo largo de la evolución. Esta ausencia de dinámica en el valor esperado transversal ocurre debido a que el estado colapsado post-medida precesa simétricamente alrededor del propio eje  $x$  bajo la influencia efectiva del hamiltoniano proyectado, resultando en un máximo matemático idéntico a cero para cualquier tiempo  $t > 0$ .

.....

- Una partícula de espín 2 tiene por hamiltoniano:

$$H = \frac{\omega}{\hbar} S_+ S_-, \quad (48)$$

siendo  $\omega$  una constante y

$$S_{\pm} = S_1 \pm iS_2 \quad (49)$$

los operadores escalera del álgebra del momento angular de espín de la partícula.

Obténganse los niveles de energía del sistema y su degeneración.

### Sección 1

El álgebra del momento angular para una partícula de espín está gobernada por las relaciones de conmutación canónicas entre sus componentes vectoriales.

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

El operador del momento angular al cuadrado y el operador proyección sobre el eje de cuantización conmutan, compartiendo una base ortonormal completa de autoestados simultáneos.

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_3] = 0$$

$$\hat{S}^2 |s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m\rangle$$

$$\hat{S}_3|s, m\rangle = \hbar m|s, m\rangle$$

Los operadores escalera de ascenso y descenso se definen a partir de las componentes transversales del momento angular.

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_1 \pm i\hat{S}_2$$

El operador hamiltoniano del sistema está definido analíticamente mediante un producto de estos operadores escalera.

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\hat{S}_+\hat{S}_-$$

Para una partícula de espín cuantizado aislado con magnitud dada, la multiplicidad determina los números cuánticos azimutales permitidos.

$$s = 2$$

$$m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

—

## Sección 2

Desarrollamos el producto de los operadores escalera utilizando su definición operatorial fundamental.

$$\hat{S}_+\hat{S}_- = (\hat{S}_1 + i\hat{S}_2)(\hat{S}_1 - i\hat{S}_2)$$

Expandimos algebraicamente el producto preservando rigurosamente el orden de los operadores no conmutativos.

$$\hat{S}_+\hat{S}_- = \hat{S}_1^2 - i\hat{S}_1\hat{S}_2 + i\hat{S}_2\hat{S}_1 + \hat{S}_2^2$$

Agrupamos los términos cruzados transversales para identificar el conmutador fundamental correspondiente.

$$\hat{S}_+\hat{S}_- = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 - i[\hat{S}_1, \hat{S}_2]$$

Sustituimos el conmutador canónico de las componentes uno y dos del espín.

$$[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = i\hbar\hat{S}_3$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 - i(i\hbar\hat{S}_3) = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hbar\hat{S}_3$$

Relacionamos la suma de los cuadrados de las componentes transversales con el operador escalar de momento angular total.

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2$$

$$\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 = \hat{S}^2 - \hat{S}_3^2$$

Reemplazamos esta identidad isométrica en la expansión del producto para obtener un operador completamente dependiente de observables compatibles.

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- = \hat{S}^2 - \hat{S}_3^2 + \hbar \hat{S}_3$$

Sustituimos el desarrollo explícito del producto en la ecuación del hamiltoniano del sistema.

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar} \left( \hat{S}^2 - \hat{S}_3^2 + \hbar \hat{S}_3 \right)$$

Aplicamos el hamiltoniano sobre los kets base de autoestados para extraer su ecuación de autovalores de energía espectral.

$$\hat{H}|s, m\rangle = \frac{\omega}{\hbar} (\hbar^2 s(s+1) - \hbar^2 m^2 + \hbar^2 m) |s, m\rangle$$

$$\hat{H}|s, m\rangle = \hbar\omega (s(s+1) - m(m-1)) |s, m\rangle$$

Imponemos la restricción cuántica específica para una partícula con momento de espín definido.

$$s = 2$$

$$E_m = \hbar\omega (2(3) - m(m-1)) = \hbar\omega (6 - m^2 + m)$$

Evaluamos numéricamente la fórmula de energía degenerada para la máxima proyección de espín posible.

$$E_2 = \hbar\omega (6 - 4 + 2) = 4\hbar\omega$$

Calculamos el espectro energético para la proyección azimutal subsecuente.

$$E_1 = \hbar\omega (6 - 1 + 1) = 6\hbar\omega$$

Determinamos el nivel correspondiente a una proyección perpendicular al eje de cuantización.

$$E_0 = \hbar\omega (6 - 0 + 0) = 6\hbar\omega$$

Iteramos la evaluación para el primer valor de proyección negativo.

$$E_{-1} = \hbar\omega (6 - 1 - 1) = 4\hbar\omega$$

Hallamos la energía de estado para la proyección completamente antiparalela.

$$E_{-2} = \hbar\omega (6 - 4 - 2) = 0$$

Agrupamos los autovalores resultantes y deducimos los índices de multiplicidad para clasificar la degeneración exacta.

$$E_1 = E_0 = 6\hbar\omega$$

$$E_2 = E_{-1} = 4\hbar\omega$$

$$E_{-2} = 0$$

—

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$E_m = \{6\hbar\omega, 4\hbar\omega, 0\}$$

$$g(6\hbar\omega) = 2, \quad g(4\hbar\omega) = 2, \quad g(0) = 1$$

Justificación Final: Los autoestados energéticos se obtienen al reescribir el producto escalar en función de los operadores  $\hat{S}^2$  y  $\hat{S}_z$ , cuya base natural diagonaliza el hamiltoniano. La asimetría matemática del término algebraico  $(m - m^2)$  rompe la paridad canónica espectral, forzando emparejamientos inusuales de degeneración bidimensional para ciertos multipletes de espín, mientras aísla un nivel basal no degenerado de energía nula.

.....

• En el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq T$ , una partícula de espín  $1/2$  se mueve bajo la acción de un campo magnético

$$\vec{B} = (B_x, 0, B_z), \quad B_x = 3, \quad B_z = 4. \quad (50)$$

El hamiltoniano de la partícula es:

$$H = -\mu (B_x \sigma_x + B_z \sigma_z), \quad (51)$$

donde  $\mu$  es el momento magnético de la partícula.

- Obtégase el operador de evolución temporal  $U(t)$ .
- En el instante inicial  $t = 0$ , la partícula está en un estado en el que la componente  $z$  del espín vale  $S_z = +\hbar/2$ . Calcúlese la probabilidad de obtener  $S_z = +\hbar/2$  y  $S_z = -\hbar/2$  cuando se efectúa una medida en el instante de tiempo  $t = T$ .
- ¿Cuáles son las probabilidades de medir  $S_x = +\hbar/2$  y  $S_x = -\hbar/2$  después de actuar el campo magnético?

### Sección 1

La evolución temporal de un sistema cuántico está gobernada por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

Para un hamiltoniano  $\hat{H}$  independiente del tiempo, el estado del sistema en un instante  $t$  se obtiene mediante la aplicación del operador de evolución temporal  $\hat{U}(t)$ :

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$$

La definición formal del operador de evolución temporal a partir de los primeros principios es:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right)$$

El hamiltoniano del sistema de espín 1/2 está definido por las matrices de Pauli  $\hat{\sigma}_x$  y  $\hat{\sigma}_z$ :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La expresión matricial del hamiltoniano  $\hat{H}$  es:

$$\hat{H} = -\mu (B_x \hat{\sigma}_x + B_z \hat{\sigma}_z)$$

Para calcular las probabilidades de medición de los observables de espín, es imperativo establecer los estados propios del operador  $\hat{S}_z$ :

$$|+z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|-z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y los estados propios del operador  $\hat{S}_x$ :

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Las restricciones probabilísticas dictan que la probabilidad  $P$  de medir un autovalor asociado a un autoestado  $|\varphi\rangle$  en un sistema caracterizado por el estado  $|\Psi\rangle$  es:

$$P = |\langle \varphi | \Psi \rangle|^2$$

## Sección 2

Sustituyendo las componentes del campo magnético en el hamiltoniano:

$$\hat{H} = -\mu (3\hat{\sigma}_x + 4\hat{\sigma}_z)$$

Se define el módulo del campo magnético:

$$|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}$$

$$|\vec{B}| = 5$$

Se extrae un vector unitario  $\hat{n}$  parametrizado por la dirección del campo:

$$\hat{n} = \left( \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right)$$

El hamiltoniano se reescribe aislando la dependencia del vector unitario:

$$\hat{H} = -5\mu(\hat{n} \cdot \hat{\sigma})$$

Sustituyendo el hamiltoniano en el operador de evolución temporal:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(i \frac{5\mu t}{\hbar} (\hat{n} \cdot \hat{\sigma})\right)$$

Se define una fase adimensional para la precesión del espín:

$$\varphi = \frac{5\mu t}{\hbar}$$

El operador exponencial se expande mediante la serie de Taylor:

$$\hat{U}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} (\hat{n} \cdot \hat{\sigma})^k$$

Se aprovecha la propiedad cíclica del álgebra del vector de matrices de Pauli  $(\hat{n} \cdot \hat{\sigma})^2 = \hat{I}$ :

$$\hat{U}(t) = \hat{I} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \varphi^{2p} + i(\hat{n} \cdot \hat{\sigma}) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \varphi^{2p+1}$$

Las sumatorias infinitas convergen a las funciones trigonométricas fundamentales:

$$\hat{U}(t) = \hat{I} \cos \varphi + i(\hat{n} \cdot \hat{\sigma}) \sin \varphi$$

Desarrollando la representación matricial completa:

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} + i \sin \varphi \begin{pmatrix} n_z & n_x \\ n_x & -n_z \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi + in_z \text{sen } \varphi & in_x \text{sen } \varphi \\ in_x \text{sen } \varphi & \cos \varphi - in_z \text{sen } \varphi \end{pmatrix}$$

Introduciendo las proyecciones del vector unitario  $\hat{n}$ :

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi + i\frac{4}{5} \text{sen } \varphi & i\frac{3}{5} \text{sen } \varphi \\ i\frac{3}{5} \text{sen } \varphi & \cos \varphi - i\frac{4}{5} \text{sen } \varphi \end{pmatrix}$$

Se establece la condición inicial en  $t = 0$ :

$$|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El estado estacionario evolucionado al instante  $t = T$  con fase asociada  $\Phi = 5\mu T/\hbar$  es:

$$|\Psi(T)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \Phi + i\frac{4}{5} \text{sen } \Phi & i\frac{3}{5} \text{sen } \Phi \\ i\frac{3}{5} \text{sen } \Phi & \cos \Phi - i\frac{4}{5} \text{sen } \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi(T)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \Phi + i\frac{4}{5} \text{sen } \Phi \\ i\frac{3}{5} \text{sen } \Phi \end{pmatrix}$$

Para el autovalor  $S_z = +\hbar/2$ , se proyecta la amplitud de probabilidad:

$$\langle +z|\Psi(T)\rangle = \cos \Phi + i\frac{4}{5} \text{sen } \Phi$$

El módulo al cuadrado determina la probabilidad exacta:

$$P(+z) = \cos^2 \Phi + \frac{16}{25} \text{sen}^2 \Phi$$

$$P(+z) = 1 - \text{sen}^2 \Phi + \frac{16}{25} \text{sen}^2 \Phi$$

$$P(+z) = 1 - \frac{9}{25} \text{sen}^2 \Phi$$

Para el autovalor  $S_z = -\hbar/2$ , la amplitud correspondiente es:

$$\langle -z|\Psi(T)\rangle = i\frac{3}{5} \text{sen } \Phi$$

Cuya norma cuadrática arroja la probabilidad complementaria:

$$P(-z) = \frac{9}{25} \text{sen}^2 \Phi$$

Para el autovalor  $S_x = +\hbar/2$ , se extrae la amplitud evaluando el producto interno:

$$\langle +x|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Phi + i\frac{4}{5} \text{sen } \Phi \\ i\frac{3}{5} \text{sen } \Phi \end{pmatrix}$$

$$\langle +x|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \Phi + i \frac{7}{5} \operatorname{sen} \Phi \right)$$

La probabilidad de observación es la magnitud al cuadrado de este escalar complejo:

$$P(+x) = \frac{1}{2} \left( \cos^2 \Phi + \frac{49}{25} \operatorname{sen}^2 \Phi \right)$$

$$P(+x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{sen}^2 \Phi + \frac{49}{25} \operatorname{sen}^2 \Phi \right)$$

$$P(+x) = \frac{1}{2} + \frac{12}{25} \operatorname{sen}^2 \Phi$$

Para el autovalor  $S_x = -\hbar/2$ , la amplitud ortogonal se calcula de manera homóloga:

$$\langle -x|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \cos \Phi + i \frac{4}{5} \operatorname{sen} \Phi & i \frac{3}{5} \operatorname{sen} \Phi \end{pmatrix}$$

$$\langle -x|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \cos \Phi + i \frac{1}{5} \operatorname{sen} \Phi \right)$$

Operando el módulo al cuadrado respectivo:

$$P(-x) = \frac{1}{2} \left( \cos^2 \Phi + \frac{1}{25} \operatorname{sen}^2 \Phi \right)$$

$$P(-x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{sen}^2 \Phi + \frac{1}{25} \operatorname{sen}^2 \Phi \right)$$

$$P(-x) = \frac{1}{2} - \frac{12}{25} \operatorname{sen}^2 \Phi$$

### Sección 3 (Síntesis)

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{5\mu t}{\hbar} \right) + i \frac{4}{5} \operatorname{sen} \left( \frac{5\mu t}{\hbar} \right) & i \frac{3}{5} \operatorname{sen} \left( \frac{5\mu t}{\hbar} \right) \\ i \frac{3}{5} \operatorname{sen} \left( \frac{5\mu t}{\hbar} \right) & \cos \left( \frac{5\mu t}{\hbar} \right) - i \frac{4}{5} \operatorname{sen} \left( \frac{5\mu t}{\hbar} \right) \end{pmatrix}$$

$$P(S_z = +\hbar/2) = 1 - \frac{9}{25} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{5\mu T}{\hbar} \right)$$

$$P(S_z = -\hbar/2) = \frac{9}{25} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{5\mu T}{\hbar} \right)$$

$$P(S_x = +\hbar/2) = \frac{1}{2} + \frac{12}{25} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{5\mu T}{\hbar} \right)$$

$$P(S_x = -\hbar/2) = \frac{1}{2} - \frac{12}{25} \sin^2\left(\frac{5\mu T}{\hbar}\right)$$

La dinámica probabilística del espín exhibe oscilaciones de Rabi impulsadas por el acoplamiento transversal del campo magnético, provocando precesión en torno a un eje inclinado definido por el vector unitario  $\hat{n}$ . Las probabilidades resultantes respetan rigurosamente el teorema de la conservación de la probabilidad, demostrando que la evolución unitaria preserva la norma del estado cuántico global.

.....

• Los experimentadores Alice y Bob efectúan medidas en el estado:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, +\rangle + |-, -\rangle), \quad (52)$$

siendo

$$|+, +\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle, \quad |-, -\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle,$$

y

$$\sigma_z |\pm\rangle = \pm |\pm\rangle. \quad (53)$$

Alice mide el espín de la primera partícula en la dirección del vector unitario  $\vec{a}$ , mientras que Bob mide el espín de la segunda partícula en la dirección del vector unitario  $\vec{b}$ .

Los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son unitarios y ambos están contenidos en el plano  $xz$ .

- a) Calcúlese la probabilidad de que las medidas den resultados iguales.
- b) Obténgase la probabilidad de que los resultados sean distintos.

### Sección 1

El estado del sistema cuántico bipartito se define en el espacio de Hilbert producto tensorial  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , formulado en la base de autoestados del operador  $\hat{\sigma}_z$ :

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |+\rangle + |-\rangle \otimes |-\rangle)$$

La medida del espín a lo largo de una dirección arbitraria unitaria  $\vec{n}$  está dictaminada por el operador observable construido mediante el producto escalar entre el vector dirección y el vector de matrices de Pauli  $\hat{\sigma}$ :

$$\hat{\sigma}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{\sigma} = n_x \hat{\sigma}_x + n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z$$

Dado que las mediciones ocurren estrictamente en el plano  $xz$ , la componente en  $y$  es nula. Todo vector unitario en este plano queda completamente parametrizado por un ángulo polar  $\theta$  respecto al eje  $z$ :

$$\vec{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Sustituyendo las matrices de Pauli estándar, el operador para una medida en el plano  $xz$  se expresa matricialmente como:

$$\hat{\sigma}_{\vec{n}} = \text{sen } \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \text{cos } \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos } \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\text{cos } \theta \end{pmatrix}$$

La probabilidad de ocurrencia para resultados combinados en sistemas bipartitos se determina por el módulo al cuadrado de la proyección del estado inicial sobre la base tensorial propia de los observables medidos:

$$P(A, B) = |(\langle a_A | \otimes \langle b_B |) |\varphi\rangle|^2$$

## Sección 2

Para evaluar las probabilidades, es imperativo obtener analíticamente los autoestados  $|n_+\rangle$  y  $|n_-\rangle$  del operador  $\hat{\sigma}_{\vec{n}}$ . Se parte de la ecuación fundamental de autovalores:

$$\hat{\sigma}_{\vec{n}}|n_{\pm}\rangle = \pm|n_{\pm}\rangle$$

Planteando el sistema lineal para el autovalor +1 con un vector de estado general en forma de columna:

$$\begin{pmatrix} \text{cos } \theta & \text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & -\text{cos } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Extrayendo la primera ecuación del sistema:

$$\alpha \text{cos } \theta + \beta \text{sen } \theta = \alpha$$

$$\beta \text{sen } \theta = \alpha(1 - \text{cos } \theta)$$

Se aísla la componente  $\beta$  en función de  $\alpha$ :

$$\beta = \alpha \frac{1 - \text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

Aplicando las identidades trigonométricas del ángulo mitad:

$$\beta = \alpha \frac{2 \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \text{sen} \left(\frac{\theta}{2}\right) \text{cos} \left(\frac{\theta}{2}\right)} = \alpha \tan \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Se impone la condición obligatoria de normalización para que el estado represente una probabilidad física válida:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$|\alpha|^2 \left[ 1 + \tan^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = 1$$

Mediante la relación pitagórica fundamental se resuelve para  $\alpha$ :

$$|\alpha|^2 \sec^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) = 1 \implies \alpha = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Sustituyendo retrospectivamente se halla  $\beta$ :

$$\beta = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

El autoestado normalizado correspondiente al autovalor +1 es:

$$|n_+\rangle = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) |+\rangle + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) |-\rangle$$

Por el principio de ortogonalidad del espacio de Hilbert ( $\langle n_+ | n_- \rangle = 0$ ), se deduce de forma directa el autoestado correspondiente a -1:

$$|n_-\rangle = -\sin \left( \frac{\theta}{2} \right) |+\rangle + \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) |-\rangle$$

Para la partícula 1 medida por Alice en la dirección  $\vec{a}$  definida por el ángulo  $\theta_a$ , y la partícula 2 medida por Bob en la dirección  $\vec{b}$  con el ángulo  $\theta_b$ , se construyen los proyectores tensoriales. Primero, calculamos la amplitud de obtener ambos resultados positivos (+, +):

$$\langle a_+, b_+ | = \left[ \cos \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \langle + | + \sin \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \langle - | \right] \otimes \left[ \cos \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \langle + | + \sin \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \langle - | \right]$$

Evaluando el producto interno con el estado  $|\varphi\rangle$ :

$$\langle a_+, b_+ | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \langle + + | + + \rangle + \sin \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \langle - - | - - \rangle \right]$$

$$\langle a_+, b_+ | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_b}{2} \right) + \sin \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \right]$$

Utilizando la identidad trigonométrica del coseno de la diferencia:

$$\langle a_+, b_+ | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

Se procesa idénticamente la amplitud para que ambos resultados sean negativos (-, -):

$$\langle a_-, b_- | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( -\sin \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \right) \left( -\sin \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \right) + \cos \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \right]$$

$$\langle a_-, b_- | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

La probabilidad total de obtener mediciones iguales  $P_{=}$  suma el cuadrado de ambas amplitudes:

$$P_{=} = |\langle a_{+}, b_{+} | \varphi \rangle|^2 + |\langle a_{-}, b_{-} | \varphi \rangle|^2$$

$$P_{=} = \frac{1}{2} \cos^2 \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

$$P_{=} = \cos^2 \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

Para los eventos dispares, se evalúa la amplitud del resultado (+, -):

$$\langle a_{+}, b_{-} | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \left( -\sin \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \right) + \sin \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \right]$$

Aplicando la identidad trigonométrica del seno de la diferencia:

$$\langle a_{+}, b_{-} | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

Análogamente, se calcula la amplitud del evento contrario (-, +):

$$\langle a_{-}, b_{+} | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( -\sin \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \right) \cos \left( \frac{\theta_b}{2} \right) + \cos \left( \frac{\theta_a}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta_b}{2} \right) \right]$$

$$\langle a_{-}, b_{+} | \varphi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

La probabilidad total de obtener mediciones diferentes  $P_{\neq}$  es la suma cuadrática de estas proyecciones ortogonales:

$$P_{\neq} = |\langle a_{+}, b_{-} | \varphi \rangle|^2 + |\langle a_{-}, b_{+} | \varphi \rangle|^2$$

$$P_{\neq} = \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

$$P_{\neq} = \sin^2 \left( \frac{\theta_a - \theta_b}{2} \right)$$

Las relaciones geométricas de los vectores directores implican que el producto escalar es el coseno del ángulo que forman. Definiendo dicho producto escalar mediante el ángulo relativo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\theta_a - \theta_b)$$

Las identidades de potencia trigonométrica permiten reescribir ambas probabilidades de forma explícita en términos vectoriales puros:

$$\cos^2\left(\frac{\theta_a - \theta_b}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\theta_a - \theta_b)}{2} = \frac{1 + \vec{a} \cdot \vec{b}}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta_a - \theta_b}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta_a - \theta_b)}{2} = \frac{1 - \vec{a} \cdot \vec{b}}{2}$$

### Sección 3 (Síntesis)

$$P_{\text{iguales}} = \frac{1 + \vec{a} \cdot \vec{b}}{2}, \quad P_{\text{distintos}} = \frac{1 - \vec{a} \cdot \vec{b}}{2}$$

Estas funciones probabilísticas evidencian de manera analítica la conservación de la probabilidad total ( $P_{=} + P_{\neq} = 1$ ) y manifiestan la firma de las correlaciones perfectas propias de un estado EPR máximamente entrelazado. La dependencia exclusiva en el producto escalar  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  demuestra la invarianza rotacional del entrelazamiento y rige directamente las cotas que vulneran las desigualdades de Bell en variables ocultas locales.

.....

- Un sistema de dos niveles está en un estado caracterizado por la matriz densidad:

$$\rho = \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}\left(i - \frac{1}{2}\right)|1\rangle\langle 2| - \frac{1}{3}\left(i + \frac{1}{2}\right)|2\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|, \quad (54)$$

siendo  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  una base ortonormal del espacio de Hilbert de dos dimensiones.

El hamiltoniano del sistema es:

$$H = \omega (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|). \quad (55)$$

Si medimos la energía del sistema en este estado:

- ¿Qué resultados podemos obtener y con qué probabilidades?
- ¿Cuál es el valor medio de la energía en esta medida?

### Sección 1

El estado de un sistema cuántico estadístico o mezcla se describe unívocamente mediante el operador matriz densidad  $\hat{\rho}$ :

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle \psi_i|$$

Para representar un estado físico válido, la matriz densidad debe cumplir las condiciones fundamentales de hermiticidad y traza unitaria:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger, \quad \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$$

Para un observable representado por el operador hermitiano  $\hat{H}$  con autoestados ortonormales  $|E_n\rangle$  y autovalores  $E_n$ , el postulado de la medida dicta que la probabilidad de obtener el valor  $E_n$  se define mediante:

$$P(E_n) = \text{Tr}(\hat{\rho}|E_n\rangle\langle E_n|) = \langle E_n|\hat{\rho}|E_n\rangle$$

El valor esperado del observable se obtiene a partir de la suma ponderada de probabilidades espectrales, o equivalentemente, mediante la traza del producto matricial de los operadores correspondientes:

$$\langle \hat{H} \rangle = \sum_n P(E_n)E_n = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{H})$$

Se define la representación matricial de los operadores proyectando sobre la base ortonormal canónica del espacio de Hilbert  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ :

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Sección 2

La representación matricial del hamiltoniano  $\hat{H}$  en la base dada se obtiene calculando los elementos de matriz  $H_{ij} = \langle i|\hat{H}|j\rangle$ :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar los resultados posibles de la medida de la energía, se debe resolver la ecuación secular y encontrar el espectro de  $\hat{H}$ :

$$\det(\hat{H} - E\hat{I}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -E & \omega \\ \omega & -E \end{vmatrix} = E^2 - \omega^2 = 0$$

Los autovalores de energía posibles para el sistema son:

$$E_+ = \omega, \quad E_- = -\omega$$

Los autoestados correspondientes se obtienen resolviendo analíticamente el sistema algebraico  $\hat{H}|E_{\pm}\rangle = E_{\pm}|E_{\pm}\rangle$  e imponiendo la normalización:

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El operador  $\hat{\rho}$  se expresa matricialmente ordenando sus coeficientes cruzados de las bases diádicas  $|i\rangle\langle j|$ :

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3}(i - \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{3}(i + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se expanden los elementos fuera de la diagonal principal para separar las partes real e imaginaria de las coherencias:

$$\hat{\rho}_{12} = -\frac{1}{6} + i\frac{1}{3}$$

$$\hat{\rho}_{21} = -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3}$$

La matriz densidad en su forma explícita es:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} + i\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se evalúa la probabilidad de medir el nivel superior de energía  $E_+$ :

$$P(E_+) = \langle E_+ | \hat{\rho} | E_+ \rangle$$

$$P(E_+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} + i\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se ejecuta secuencialmente el producto matricial:

$$P(E_+) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + i\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P(E_+) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + i\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - i\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

Se reducen algebraicamente las componentes complejas, las cuales se cancelan estrictamente debido a la hermiticidad:

$$P(E_+) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$P(E_+) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

A continuación, se calcula la probabilidad de medir el nivel inferior de energía  $E_-$ :

$$P(E_-) = \langle E_- | \hat{\rho} | E_- \rangle$$

$$P(E_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} + i\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P(E_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - i\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P(E_-) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - i\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + i\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$P(E_-) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Para determinar el valor esperado de la energía, se computa la matriz resultante del producto de los operadores  $\hat{\rho}\hat{H}$ :

$$\hat{\rho}\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} + i\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}\hat{H} = \begin{pmatrix} \omega \left( -\frac{1}{6} + i\frac{1}{3} \right) & \frac{\omega}{2} \\ \omega \left( -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} \right) & \omega \left( -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} \right) \end{pmatrix}$$

La traza de este nuevo operador proporciona invariablemente el valor de expectación  $\langle \hat{H} \rangle$ :

$$\langle \hat{H} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{H}) = \omega \left( -\frac{1}{6} + i\frac{1}{3} \right) + \omega \left( -\frac{1}{6} - i\frac{1}{3} \right)$$

$$\langle \hat{H} \rangle = -\frac{2\omega}{6} = -\frac{\omega}{3}$$

### Sección 3 (Síntesis)

Resultado Final:

$$P(\omega) = \frac{1}{3}, \quad P(-\omega) = \frac{2}{3}, \quad \langle \hat{H} \rangle = -\frac{\omega}{3}$$

Justificación Final: El sistema únicamente puede colapsar a los autovalores estacionarios de la energía dictaminados por la simetría de intercambio del hamiltoniano. La asimetría intrínseca en la distribución de probabilidades surge estrictamente de las coherencias cuánticas (la parte real de los elementos no diagonales de  $\hat{\rho}$ ), provocando un desplazamiento neto del valor esperado de la energía hacia el estado inferior.